В. И. АРНОЛЬД

ЗАДАЧИ ДЛЯ ДЕТЕЙ ОТ 5 ДО 15 ЛЕТ

Москва
Издательство МЦНМО
2004

УДК 51(07)
ББК 22.1
А84

Арнольд В. И.

А84 Задачи для детей от 5 до 15 лет. — М.: МЦНМО, 2004. — 16 с.

ISBN 5-94057-183-2

Эту брошюру составляют 77 задач для развития культуры мышления, подобранных или сочиненных автором. Большинство из них не требует никаких специальных знаний, выходящих за рамки общего образования. Однако решение отдельных задач может оказаться непростым делом даже для профессоров.

Книга адресована школьникам, студентам, учителям, родителям — всем, кто считает культуру мышления неотъемлемой частью развития личности.

УДК 51(07)
ББК 22.1

Владимир Игоревич Арнольд
ЗАДАЧИ ДЛЯ ДЕТЕЙ ОТ 5 ДО 15 ЛЕТ

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 11.12.2004 г. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная. Объем 1 печ. л. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241–72–85.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-183-2

Эти задачи я записал в Париже весной 2004 года, когда русские парижане попросили меня помочь их малолетним детям приобрести традиционную для России, но далеко превосходящую все западные обычаи культуру мышления.

Я глубоко убежден, что эта культура более всего воспитывается ранним самостоятельным размышлением о простых, но не легких вопросах, вроде приведенных ниже (рекомендую особенно задачи 1, 3, 13).

Мой долгий опыт показал, что отстающие в школе двоечники часто решают их лучше отличников, так как им на своей «камчатке» все время приходится для выживания думать больше, чем «чтоб управлять всей Севильей и Гренадой», как говорил о себе Фигаро, в то время как отличники не могут взять в толк, «что на что требуется умножать» в этих задачах. Я заметил даже, что пятилетние дети решают подобные задачи лучше школьников, испорченных натаскиванием, которым они даются легче, чем студентам, подвергшимся зубрежке в университете, но все же превосходящим своих профессоров (хуже всех решают эти простые задачи нобелевские и филдсовские лауреаты).

* * *

1. У Маши не хватало для покупки букваря семи копеек, а у Миши одной копейки. Они сложились, чтобы купить один букварь на двоих, но денег все равно не хватило. Сколько стоил букварь?

2. Бутылка с пробкой стоит 10 копеек, причем бутылка на 9 копеек дороже пробки. Сколько стоит бутылка без пробки?

3. Кирпич весит фунт и полкирпича. Сколько фунтов весит кирпич?

4. Из бочки вина перелили ложку его в (неполный) стакан с чаем. А потом такую же ложку (неоднородной) смеси из стакана — обратно в бочку. Теперь и в бочке, и в стакане имеется некоторый объем посторонней жидкости (вина в стакане, чая в бочке). Где объем посторонней жидкости больше: в стакане или в бочке?

5. Из A в B и из B в A на рассвете (одновременно) вышли навстречу друг другу (по одной дороге) две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждая продолжала идти с той же скоростью, и первая пришла (в B) в 4 часа дня, а вторая (в A) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника (в американском стандартном экзамене) — 10 дюймов, а опущенная на нее высота — 6 дюймов. Найти площадь треугольника.

С этой задачей американские школьники успешно справлялись 10 лет, но потом приехали из Москвы русские школьники, и ни один эту задачу решить, как американские школьники (дававшие ответ 30 квадратных дюймов), не мог. Почему?

7. У Васи сестер на 2 больше, чем братьев. На сколько у Васиных родителей больше дочерей, чем сыновей?

8. В Южной Америке есть круглое озеро, где 1 июня каждого года в центре озера появляется цветок Виктории Регии (стебель поднимается со дна, а лепестки лежат на воде, как у кувшинки). Каждые сутки площадь цветка увеличивается вдвое, и 1 июля он, наконец, покрывает все озеро, лепестки осыпаются, семена опускаются на дно. Какого числа площадь цветка составляет половину площади озера?

9. Волк, коза и капуста должны быть перевезены мужиком через реку в лодке, но лодка столь мала, что он может брать с собой только один из трех грузов. Как перевезти все три груза (волка нельзя оставлять наедине с козой, а козу — с капустой) через реку?

10. Улитка за день залезает вверх по столбу на 3 см, а за ночь, уснув, нечаянно спускается на 2 см. Высота столба 10 м, а наверху лежит вкусная для улитки конфета. Через сколько дней улитка ее достанет?

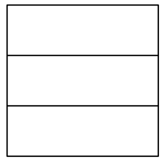
11. Охотник прошел от своей палатки 10 км на юг, повернул на восток, прошел прямо на восток еще 10 км, убил медведя, повернул на север и, пройдя еще 10 км, оказался у палатки. Какого цвета был медведь и где это все было?

12. Сегодня в 12 часов дня был прилив. Когда он будет (там же) завтра?

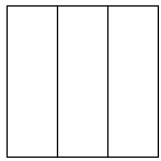
13. На книжной полке рядом стоят два тома Пушкина: первый и второй. Страницы каждого тома имеют вместе толщину 2 см, а обложка — каждая — 2 мм. Червь прогрыз (перпендикулярно страницам) от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома. Какой путь он прогрыз?

[Эта топологическая задача с невероятным ответом — 4 мм — совершенно недоступна академикам, но некоторые дошкольники легко справляются с ней.]

14. Найти тело, имеющее такой вид сверху и такой вид спереди (многогранники). Нарисовать вид сбоку (невидимые ребра многогранника изобразить пунктиром).



Вид сверху

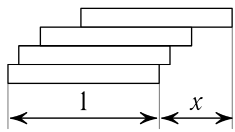


Вид спереди

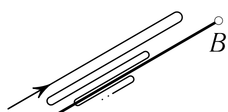
15. Сколькими способами можно разбить число 64 на 10 натуральных слагаемых (целых $\geqslant 1$), наибольшее из которых равно 12?

[Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, не считаются при подсчете числа разбиений разными.]

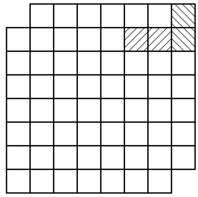
16. Положив (нужным образом) друг на друга несколько одинаковых пластинок (например, костяшек домино), можно образовать навес длиной x костяшек. Каково наибольшее достижимое значение длины навеса x?



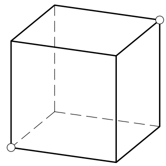
17. От города A до города B расстояние 40 км. Два велосипедиста выехали из A и из B одновременно и навстречу друг другу, один со скоростью 10 км/час, а другой — 15 км/час. Муха вылетела с первым из A со скоростью 100 км/час, долетела до второго, села ему на лоб и полетела обратно к первому, села ему на лоб, вернулась ко второму и так далее, пока они не столкнулись лбами и не раздавили ими муху. Сколько километров она пролетела всего?



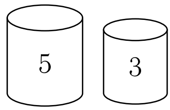
18. Одна костяшка домино покрывает две клетки шахматной доски. Покрыть 31 костяшкой все клетки, кроме двух противоположных (на одной диагонали). [Шахматная доска состоит из $8 \times 8 = 64$ клеток.]



19. Гусеница хочет проползти из одного угла кубической комнаты (на полу слева) в противоположный (на потолке справа). Найти кратчайший путь такого путешествия по стенам комнаты.

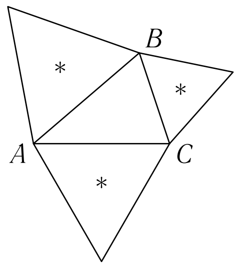


20. Имея два сосуда объемом 5 литров и 3 литра, отмерь один литр (получи его в одном из сосудов).

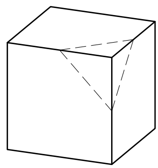


21. В семье пять голов и четырнадцать ног. Сколько из них людей, а сколько собак?

22. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону от него построены равносторонние треугольники (со сторонами AB, BC, CA). Доказать, что их центры $(*)$ образуют равносторонний треугольник.

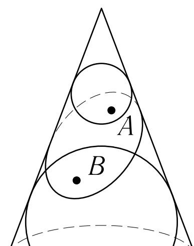


23. Какие многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью? Может ли получиться пятиугольник? Семиугольник? Правильный шестиугольник?

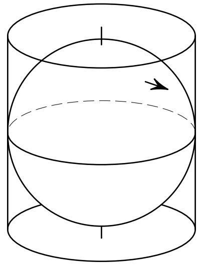


24. Через центр куба провести прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний восьми вершин куба от нее была а) максимальной, б) минимальной (по сравнению с другими прямыми).

25. Прямой круговой конус пересечен плоскостью по замкнутой кривой. Вписанные в конус шары касаются плоскости сечения в точках A для одного и B для другого шара. Найти на линии сечения точку C так, чтобы сумма расстояний $CA + CB$ была а) наибольшей, б) наименьшей.

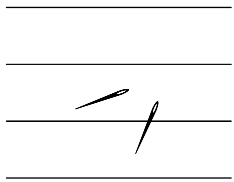


26. На цилиндр, образованный касательными к меридианам в точках экватора земного шара, поверхность Земли спроектирована лучами, параллельными экватору и проходящими через (соединяющую полюса) ось земли. Будет ли площадь проекции Франции больше или меньше, чем площадь самой Франции?



27. Доказать, что остаток от деления числа 2^{p-1} на простое нечетное число p равен 1 (примеры: $2^2=3a+1$, $2^4=5b+1$, $2^6=7c+1$, $2^{10}-1=1023=11\cdot 93$).

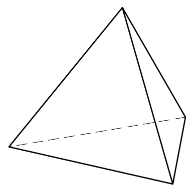
28. Иголку длиной 10 см случайно бросают на разлинованную бумагу, где расстояние между соседними линиями тоже 10 см, повторяя это N (миллион) раз. Сколько раз (примерно, с ошибкой в несколько процентов) упавшая иголка пересечет линию бумаги?



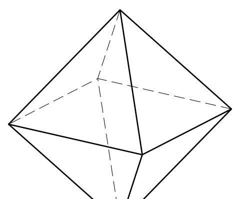
Можно проделать (как я делал в 10 лет) этот опыт с $N=100$ вместо миллиона бросаний. [Ответ в этой задаче удивительный: $\frac{2}{\pi}N$, причем даже для кривой иглы длины $a\cdot 10$ см число наблюдаемых за N бросаний пересечений будет $\frac{2a}{\pi}N$ приблизительно. Число $\pi\approx\frac{355}{113}\approx\frac{22}{7}$.]

29. Многогранники с треугольными гранями — это, например, платоновы тела, тетраэдр (4 грани), октаэдр (их 8), икосаэдр (их 20 — и все грани одинаковые; интересно его нарисовать, у него 12 вершин и 30 ребер).

Верно ли, что для любого такого (ограниченного выпуклого многогранника с треугольными гранями) число граней равно удвоенному числу вершин минус четыре?



тетраэдр (тетра $=4$)



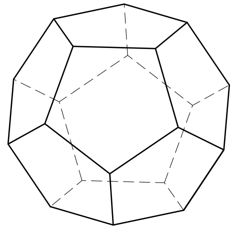
октаэдр (окто $=8$)

?

икосаэдр

Еще одно платоново тело (их всего 5):

30. Додекаэдр — выпуклый многогранник с двенадцатью (правильными) пятиугольными гранями, двадцатью вершинами и тридцатью ребрами (его вершины — это центры граней икосаэдра).

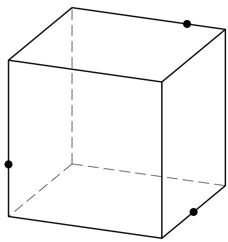


Вписать в додекаэдр пять кубов (вершины каждого куба — часть вершин додекаэдра), ребра которых — диагонали граней додекаэдра (ребер у куба 12, по одной на грани). [Это придумал Кеплер, ради планет.]

31. Найти пересечение двух тетраэдров, вписанных в куб (так, что вершины каждого — часть вершин куба, а ребра — диагонали граней).

Какую часть объема куба составляет это пересечение тетраэдров?

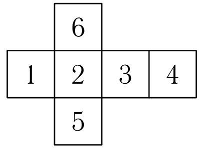
31$^{\text{bis}}$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три заданные точки на ребрах. [Нарисовать многоугольник, по которому плоскость сечения пересекает грани куба.]

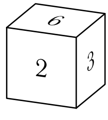


32. Сколько симметрий имеет тетраэдр? куб? октаэдр? икосаэдр? додекаэдр? Симметрия — это преобразование, сохраняющее длины.

Сколько среди них вращений и сколько отражений (в каждом из пяти перечисленных случаев)?

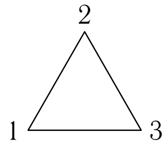
33. Сколькими способами можно раскрасить 6 граней одинаковых кубиков шестью красками (1, …, 6) [по одной на грани] так, чтобы никакие два из получившихся раскрашенных кубиков не были одинаковыми (не переходили один в другой при каком-то вращении)?



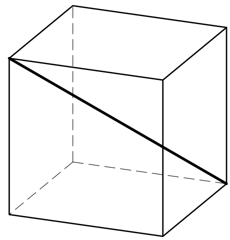


34. Сколькими разными способами можно переставить n предметов?

Для $n=3$ их шесть: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1). А если предметов $n=4$? $n=5$? $n=6$? $n=10$?



35. У куба 4 большие диагонали. Сколько разных перестановок этих четырех предметов осуществляют все вращения куба?



36. Из куба суммы нескольких целых чисел вычли сумму кубов этих чисел. Верно ли, что разность всегда делится на 3?

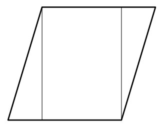
37. Такой же вопрос для пятых степеней и делимости на 5, седьмых степеней и делимости на 7.

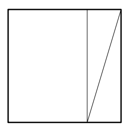
38. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

(с ошибкой не более 1% от ответа).

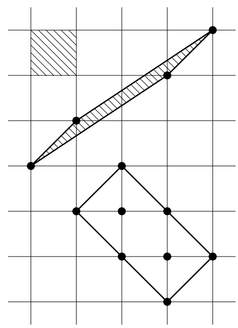
39. Если два многоугольника имеют одинаковые площади, то их можно разрезать на конечное число многоугольных частей, перекладывая которые по-разному можно получить и один, и другой многоугольник (доказать!). [Для пространственных тел это неверно: куб и тетраэдр одинакового объема так разрезать нельзя!]





40. В вершинах клетчатой бумаги выбраны 4 вершины параллелограмма, и оказалось, что ни на сторонах, ни внутри его нет других точек пересечения линий клетчатой бумаги. Доказать, что площадь такого параллелограмма равна площади одной клеточки клетчатой бумаги.

41. В условиях задачи 40 внутри оказалось a точек пересечения, а на сторонах b. Найти площадь.

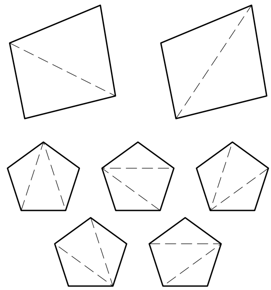


$a=2,\ b=2$

42. Верно ли аналогичное задаче 40 утверждение для параллелепипедов в пространстве?

43. Числа кроликов («Фибоначчи») образуют последовательность ($a_1 = 1$), 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., в которой $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ для всякого $n = 1, 2, \ldots$ Найти наибольший общий делитель чисел a_{100} и a_{99}.

44. Найти число (Каталана) разбиений выпуклого n-угольника на треугольники его непересекающимися диагоналями. Например, $c(4) = 2$, $c(5) = 5$, $c(6) = 14$. А как найти $c(10)$?



45. В турнире «на кубок» участвуют n команд, и проигравший выбывает, а после $n - 1$ игры остается победитель. Расписание турнира можно записать в виде символа вроде $((a, (b, c)), d)$ [b играет с c, победитель с a, победитель с d].

Сколько разных расписаний, если команд 10?

Если команд 2 — только (a, b), число $= 1$.

Если команд 3 — только $((a, b), c)$, или $((a, c), b)$, или $((b, c), a)$, число $= 3$.

Если команд 4:

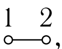
$(((a, b), c), d)$ $\quad (((a, c), b), d)$ $\quad (((a, d), b), c)$ $\quad (((b, c), a), d)$

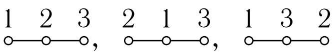
$(((b, d), a), c)$ $\quad (((c, d), a), b)$ $\quad (((a, b), d), c)$ $\quad (((a, c), d), b)$

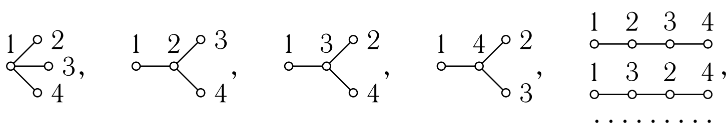
$(((a, d), c), b)$ $\quad (((b, c), d), a)$ $\quad (((b, d), c), a)$ $\quad (((c, d), b), a)$

$((a, b), (c, d))$ $\quad ((a, c), (b, d))$ $\quad ((a, d), (b, c))$.

46. Соединить n точек 1, 2, ..., n отрезками (их $n - 1$) так, чтобы получилось дерево. Сколько разных деревьев можно получить (при $n = 5$ уже интересно!)?

$n = 2$: , число $= 1$;

$n = 3$: , число $= 3$;

$n = 4$: 

число $= 16$.

47. Перестановка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется *змеей* (длины n), если $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 \ldots$

Пример. $n=2$, только $1<2$, число $=1$,

$$n=3, \qquad \left.\begin{matrix} 1<3>2 \\ 2<3>1 \end{matrix}\right\}, \qquad \text{число} = 2,$$

$$n=4, \qquad \left.\begin{matrix} 1<3>2<4 \\ 1<4>2<3 \\ 2<3>1<4 \\ 2<4>1<3 \\ 3<4>1<2 \end{matrix}\right\}, \qquad \text{число} = 5.$$

Найти число змей длины 10.

48. Обозначим через s_n число змей длины n:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 5, \quad s_5 = 16, \quad s_6 = 61.$$

Доказать, что ряд Тейлора тангенса есть

$$\operatorname{tg} x = 1\,\frac{x^1}{1!} + 2\,\frac{x^3}{3!} + 16\,\frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} s_{2k-1}\,\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

49. Вычислить сумму ряда

$$1 + 1\,\frac{x^2}{2!} + 5\,\frac{x^4}{4!} + 61\,\frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} s_{2k}\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

50. Доказать при $s>1$ тождество

$$\prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

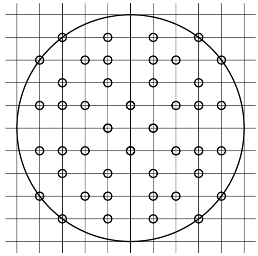
(произведение по всем простым числам p, сумма по всем натуральным числам n).

51. Вычислить сумму ряда

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(доказать, что она равна $\pi^2/6$, т. е. примерно $3/2$).

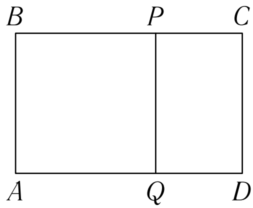
52. Найти вероятность несократимости дроби p/q (она определяется так: в круге $p^2+q^2\leqslant R^2$ считается число N векторов с целыми p и q без общего делителя, большего 1, и затем вероятность несократимости — это предел отношения $N(R)/M(R)$, где $M(R)$ — число всех целых точек в круге ($M\sim\pi R^2$).



$M(5)=81$, $N(5)=44$, $N/M=44/81$

53. Для последовательности чисел Фибоначчи a_n задачи 43 найти предел отношения a_{n+1}/a_n при стремлении n к бесконечности:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,\ \ \frac{3}{2},\ \ \frac{5}{3},\ \ \frac{8}{5},\ \ \frac{13}{8},\ \ \frac{34}{21}.$$



О т в е т: «золотое сечение», $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx\approx 1{,}618$. [Это соотношение сторон открытки, остающейся себе подобной при отрезании квадрата, стороной которого является меньшая сторона открытки $\frac{AB}{BC}=\frac{PC}{CD}$.] Как связаны с золотым сечением правильный пятиугольник и пятиугольная звезда?

54. Вычислить бесконечную цепную дробь

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{2k}=1 \\ a_{2k+1}=2 \end{bmatrix}$$

(найти предел дробей

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}\quad \text{при}\quad n\to\infty).$$

55. Найти многочлены

$y=\cos 3(\arccos x)$, $y=\cos 4(\arccos x)$, $y=\cos n(\arccos x)$,

где $|x|\leqslant 1$.

56. Вычислить сумму k-х степеней всех n корней степени n из 1 (комплексных).

57. Нарисовать на плоскости $(x,\ y)$ кривые, заданные параметрически

$$\{x=\cos 2t,\ y=\sin 3t\},\qquad \{x=t^3-3t,\ y=t^4-2t^2\}.$$

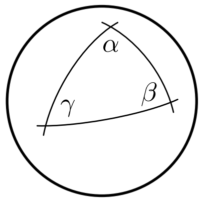
58. Вычислить (с ошибкой не больше 10% ответа)

$$\int_0^{2\pi}\sin^{100}x\,dx.$$

59. Вычислить (с ошибкой не больше 10% ответа)

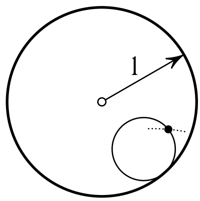
$$\int_1^{10}x^x\,dx.$$

60. Найти площадь треугольника с углами $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ на сфере радиуса 1, стороны которого — окружности больших кругов (сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр).



О т в е т: $S=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ (например, для треугольника с тремя прямыми углами $S=\pi/2$ — одна восьмая полной площади всей сферы).

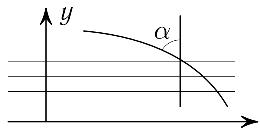
61. Окружность радиуса r катится внутри круга по окружности радиуса 1 (без скольжения). Нарисовать всю траекторию одной из точек катящейся окружности (эта траектория называется гипоциклоидой) при $r=1/3$, при $r=1/4$, при $r=1/n$, при $r=1/2$.



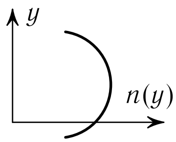
62. В классе из n учеников оценить вероятность наличия двух учеников с одинаковыми днями рождения. Велика она или мала?

О т в е т: (очень) велика, если учеников (сильно) больше n_0, (очень) мала, если (сильно) меньше n_0, а вот чему равно это n_0 (когда $p\approx 1/2$) надо найти.

63. Закон Снелла (Снеллиуса) говорит, что угол α луча света с нормалью к слоям слоистой среды удовлетворяет уравнению $n(y)\sin\alpha = \mathrm{const}$, где $n(y)$ — «показатель преломления» слоя на высоте (величина n обратна величине скорости света в среде, считая скорость в пустоте за 1; в воде $n = 4/3$).



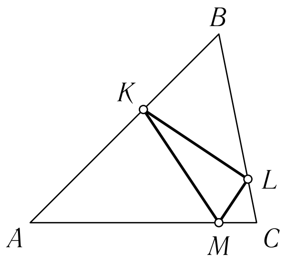
Нарисовать ход лучей в среде «воздух над пустыней», где показатель $n(y)$ имеет максимум на некоторой высоте:



(решение этой задачи объясняет явление миража в пустыне тем, кто понимает, как ход лучей, идущих от предметов, связан с изображениями).

64. Вписать в остроугольный треугольник ABC треугольник KLM минимального периметра (с вершинами K на AB, L на BC, M на CA).

У к а з а н и е: Для неостроугольных треугольников ответ получается непохожий на красивый ответ для остроугольных.



65. Вычислить среднее значение функции $1/r$ (где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, r — расстояние от начала координат) по сфере радиуса R с центром в точке (X, Y, Z).

У к а з а н и е: Задача связана с законом всемирного тяготения Ньютона и с законом Кулона теории электричества. В двумерном варианте задачи функцию нужно заменить на $\ln r$, а сферу — на окружность.

66. Из того, что $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ следует, что $\log_{10} 2 \approx 0{,}3$.

Оценить, насколько они отличаются, и вычислить $\log_{10} 2$ с тремя десятичными знаками после запятой.

67. Найти с той же точностью $\log_{10} 4$, $\log_{10} 8$, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 50$, $\log_{10} 32$, $\log_{10} 128$, $\log_{10} 125$, $\log_{10} 64$.

68. Зная, что $7^2 \approx 50$, найти приближенно $\log_{10} 7$.

69. Зная $\log_{10} 64$ и $\log_{10} 7$, найти $\log_{10} 9$, $\log_{10} 3$, $\log_{10} 27$, $\log_{10} 6$, $\log_{10} 12$.

70. Зная $\ln(1+x) \approx x$ ($\ln$ — это $\log_e$), найти $\log_{10} e$ и $\ln 10$ из соотношения[1]

$$\log_{10} a = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

и из ранее вычисленных $\log_{10} a$ (например, для $a = 128/125$, $1024/1000$ и т. п.).

[Решения задач 65—69 доставляют за полчаса вычисленную таблицу четырехзначных логарифмов любых чисел, используя произведение найденных уже чисел как опорные пункты и формулу

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

для поправок.] ⟨Ньютон составил так таблицу 40-значных логарифмов!⟩

71. Составим последовательность степеней двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, … У первых двенадцати чисел десятичная запись начинается с 1 у четырех, а с 7 ни у одного.

Доказать, что в пределе $n \to \infty$ первая цифра чисел 2^m, $0 \leqslant m \leqslant n$, будет в среднем встречаться с определенной частотой:

$$p_1 \approx 30\%, \quad p_2 \approx 18\%, \quad \ldots, \quad p_9 \approx 4\%.$$

72. Проверить, как ведут себя первые цифры степеней тройки, 1, 3, 9, 2, 8, 2, 7, … Доказать, что и здесь в пределе получаются определенные частоты, причем такие же, как для степеней двойки. Найти точную формулу для $p_1, \ldots, p_9$.

Указание: Первая цифра числа x определяется дробной долей числа $\log_{10} x$, поэтому нужно рассмотреть последовательность дробных долей чисел $m\alpha$, где $\alpha = \log_{10} 2$.

Доказать, что эти дробные доли распределены на отрезке от 0 до 1 равномерно: среди дробных долей чисел $m\alpha$,

---

[1]Число Эйлера $e = 2{,}71828\ldots$ определяется как предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ и равно также сумме ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ Его можно также определить приведенной формулой для $\ln(1+x)$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$0 \leqslant m < n$, в подинтервал A попадет из этих n дробных долей количество $k_n(A)$ такое, что при $n \to \infty$, $\lim(k_n(A)/n) =$ (длина подинтервала A).

73. Пусть $g\colon M \to M$ — гладкое отображение ограниченной области M на себя, которое взаимно однозначно и сохраняет площади (объемы в многомерном случае) областей.

Доказать, что в любой окрестности U любой точки из M и для любого N найдется точка x такая, что $g^T x$ тоже лежит в U при некотором целом $T > N$ («теорема возвращения»).

74. Пусть M — поверхность тора (с координатами α $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$, β $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$, $g(\alpha, \beta) = (\alpha + 1, \beta + \sqrt{2})$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Доказать, что последовательность точек $\{g^T(x)\}$, $T = 1, 2, \ldots$, всюду плотно заполняет тор.

75. В обозначениях задачи 74 пусть

$$g(\alpha, \beta) = (2\alpha + \beta, \alpha + \beta) \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Доказать, что имеется всюду плотное на торе подмножество периодических точек x (таких, что $g^{T(x)}x = x$ для некоторого целого $T > 0$).

76. В обозначениях задачи 74 доказать, что для почти всех точек x тора последовательность точек $\{g^T(x)\}$, $T = 1, 2, \ldots$, всюду плотно заполняет тор (точки x без этого свойства образуют множество меры нуль).

77. В задачах 74 и 76 доказать, что последовательность $\{g^T(x)\}$, $T = 1, 2, \ldots$, распределяется на торе равномерно: если в область A из n точек с $T = 1, 2, \ldots, n$ попало $k_n(A)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(A)}{n} = \frac{\mathrm{mes}\ A}{\mathrm{mes}\ M}$$

(например, для измеримой по Жордану области A меры $\mathrm{mes}\ A$).

Примечание к задаче 13. Я пытался пояснить этой задачей разницу между подходами к делу математиков и физиков в заказанной мне журналом «Успехи физических наук» статье к 2000 юбилею Рождества. Мой успех оказался далеко превосходящим задуманный мною план: редакторы, в отличие от дошкольников, на опыте с которыми я основывал свои планы, решить задачу не смогли, поэтому изменили условие, чтобы подогнать его под указанный мной ответ 4 мм, так: вместо «от первой страницы первого тома до последней второго» набрали «от *последней* страницы первого тома до *первой* страницы второго».

Эта правдивая история настолько неправдоподобна, что я помещаю ее здесь: доказательством является опубликованный журналом редакторский вариант.