

Espacios de métricas riemannianas

Mauricio Bustamante • Jan-Bernhard Kordaß

Las métricas riemannianas dan a las variedades suaves, como las superficies, propiedades geométricas intrínsecas, por ejemplo la curvatura. También permiten medir cantidades como distancias, ángulos y volúmenes. Estas son las nociones que utilizamos para caracterizar la “forma” de una variedad. El espacio de métricas riemannianas de una variedad suave es un objeto matemático que codifica las posibles maneras en las que podemos deformar geoméricamente la forma de la variedad.

1. Variedades suaves

Los personajes principales de esta instantánea son las variedades suaves, también llamadas variedades lisas, y las métricas riemannianas. Daremos la definición formal de variedad suave en un momento, pero comenzaremos con el caso especial de superficies suaves. Una *superficie suave* es un subespacio de dimensión 2 de algún espacio circundante \mathbb{R}^k tal que cada parte suficientemente pequeña del subespacio puede deformarse a un disco euclidiano de dimensión 2. Esta deformación tiene que ser *suave*, es decir, debemos de poder tomar tantas derivadas como deseemos de la deformación.

Sin embargo, las superficies lisas son simplemente el caso especial $n = 2$ de las variedades suaves *n-dimensionales*. Para definir en general a las variedades suaves *n-dimensionales*, introduciremos la noción de difeomorfismo. Un *difeomorfismo*

es una función biyectiva suave cuya inversa también es suave. Dos conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n son *difeomorfos* si existe un difeomorfismo que envía uno al otro. Ahora podemos definir una *variedad n -dimensional suave* M como un subespacio del espacio euclidiano \mathbb{R}^k para algún número suficientemente grande $k \geq n$ con la propiedad de que cada punto de M tiene una vecindad abierta que es difeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n (vea la Figura 1).

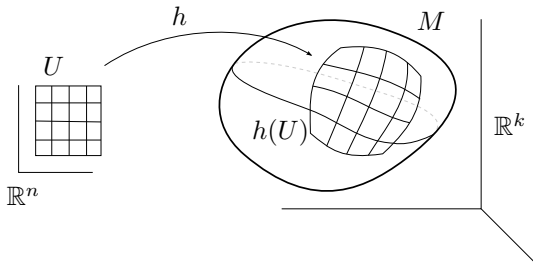


Figura 1: Una variedad suave está hecha de pedazos del espacio euclídeo.

El primer ejemplo de variedad n -dimensional lisa es \mathbb{R}^n , el espacio euclídeo de dimensión n . Para ver que \mathbb{R}^n es una variedad suave, observe que \mathbb{R}^n en sí mismo sirve como una vecindad abierta de cada uno de sus puntos y el mapa identidad es un difeomorfismo.

Otro ejemplo importante y menos trivial de variedad suave es la esfera n -dimensional \mathbb{S}^n . La esfera consiste de todos los puntos en \mathbb{R}^{n+1} que están a distancia 1 del origen. Por ejemplo, en dimensión $n = 2$, \mathbb{S}^2 se ve como la superficie de una bola tridimensional (como un globo) y se define formalmente de la siguiente manera:

$$\mathbb{S}^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}.$$

Tome en cuenta que $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ describe la distancia del punto (X, Y, Z) al punto $(0, 0, 0)$ y si esta distancia es 1, entonces también $X^2 + Y^2 + Z^2$ es igual a 1. Para demostrar que \mathbb{S}^2 es una variedad suave de dimensión 2, usaremos un lenguaje inspirado en el que se usa para describir a un globo terráqueo. Primero, definimos el *hemisferio sur aumentado* \mathcal{S} de \mathbb{S}^2 como toda la esfera con el polo norte eliminado. Asimismo, el *hemisferio norte aumentado* \mathcal{N} es todo \mathbb{S}^2 menos el polo sur. Observe que tanto \mathcal{N} como \mathcal{S} son conjuntos abiertos de \mathbb{S}^2 y cada punto $(X, Y, Z) \in \mathbb{S}^2$ está contenido en al menos uno de los dos hemisferios aumentados. Por lo tanto, para probar que \mathbb{S}^2 es una variedad suave de dimensión 2 es suficiente mostrar que cada uno de estos dos hemisferios aumentados es difeomorfo a un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Podemos hacer esto mediante la *proyección estereográfica*: seleccione su punto favorito, digamos

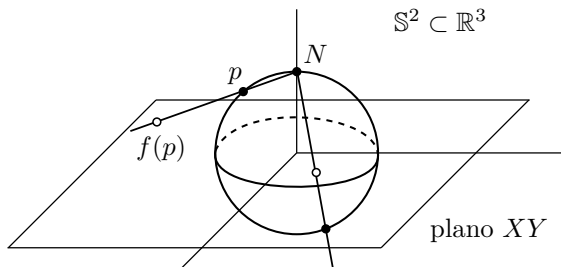


Figura 2: Proyección estereográfica de dos puntos diferentes p y q , donde los puntos en la esfera aparecen en negro, mientras que los del plano XY en blanco.

$p = (X, Y, Z)$ en \mathcal{S} y dibuje la línea que pasa por el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y p (vea Figura 2). Ahora, la proyección estereográfica de p en el plano XY se define como el punto donde esta línea interseca al plano XY . La ecuación vectorial de esta línea es $r(t) = N + tv$, donde $v = (X, Y, Z - 1)$. Por consiguiente, la intersección de esta línea con el plano XY ocurre cuando $t = 1/(1 - Z)$, que corresponde al punto $P = (x, y, 0) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z}, 0\right)$. De esta manera, hemos definido un mapa suave $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante la ecuación

$$f(X, Y, Z) = (x, y) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z}\right). \quad (1)$$

No es difícil obtener la inversa de f simplemente comenzando con cualquier punto $(x, y, 0)$ del plano XY , dibujando la línea desde el punto hasta el polo norte en \mathbb{S}^2 y calculando su intersección con la esfera. Con esto, uno ve fácilmente que f es un difeomorfismo entre las vecindades abiertas \mathcal{S} de p y \mathbb{R}^2 . Análogamente uno demuestra que \mathcal{N} también es difeomorfo a \mathbb{R}^2 . En consecuencia, \mathbb{S}^2 es una variedad bidimensional suave.

2. Métricas riemannianas

Ahora queremos introducir geometría en las variedades suaves. Por ejemplo, ¿cómo se pueden medir las longitudes de curvas en una variedad suave M o los ángulos entre vectores? Tomemos primero a la variedad lisa más simple, a saber, \mathbb{R}^n . Una operación básica entre vectores de \mathbb{R}^n es el *producto punto*, que es un número real

$$vw^T = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$$

para cualesquiera dos vectores (fila) $v = (v_1, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, \dots, w_n)$. Una vez que tenemos el producto punto, podemos escribir la fórmula del ángulo entre v y w como $\arccos(vw^T / \|v\| \|w\|)$. Además, la longitud de una curva con velocidad $\sigma(t)$ es $\int_{t_0}^{t_1} \|\sigma(t)\| dt$. Aquí $\|v\| = \sqrt{vv^T} = \sqrt{(v_1)^2 + \dots + (v_n)^2}$ es la longitud del vector v .

Con el fin de dar sentido a todo esto en variedades lisas en general, necesitamos desarrollar la noción de vector tangente de una variedad y también de longitud de un vector. De manera informal, podemos decir que un vector tangente es un vector en el espacio circundante \mathbb{R}^k que comienza en un punto de la variedad y cuya dirección es tangencial a la variedad. Hagamos esto preciso. Un *vector tangente* v en un punto p de una variedad suave M puede definirse como la derivada al tiempo $t = 0$ de una curva suave de la variedad, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$. Tome en cuenta que si dos de estas curvas tienen la misma derivada en $t = 0$ entonces definen al mismo vector tangente en p . En la Figura 3 representamos dos curvas y sus vectores tangentes correspondientes. El conjunto de todos los vectores tangentes en p se denota por T_pM y se denomina *espacio tangente de M en p* . Por ejemplo, el espacio tangente en cualquier punto de una superficie lisa contenida en \mathbb{R}^3 es un plano dentro de \mathbb{R}^3 . La suma vectorial convierte a T_pM en un espacio vectorial y se le puede dar una base de la siguiente manera: por definición de variedad suave, hay un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ junto con un difeomorfismo $h : U \rightarrow h(U) \subset M \subset \mathbb{R}^k$ con $p = h(x)$ para algún $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Entonces h puede considerarse como una función vectorial que depende de las variables x_1, \dots, x_n . Los vectores tangentes $\frac{\partial h}{\partial x_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \Big|_x$ forman una base del espacio tangente T_pM .

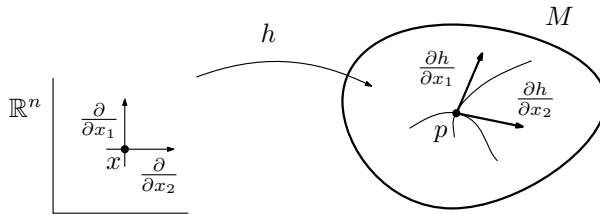


Figura 3: Las variedades suaves tienen un espacio tangente en cada punto.

Esta base se utiliza para dotar al espacio tangente T_pM con un producto interno. Este concepto es una generalización del producto punto que utilizamos anteriormente. Más precisamente, un *producto interno* en un espacio vectorial real V es un mapa bilíneal simétrico $P : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(v, v) \geq 0$ para todo $v \in V$ y $P(v, v) = 0$ si y solo si $v = 0$.

La forma en que hacemos esto es considerando la matriz simétrica de $n \times n$

$$g_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^T & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_n} \right)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^T & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_n} \right)^T \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde $\frac{\partial h}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} \right)^T$ es el producto punto usual. Entonces la fórmula

$$g_p(v, w) = v g_p w^T = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^T & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_n} \right)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^T & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_n} \right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

donde $v = (v_1, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, \dots, w_n)$ son vectores tangentes en $p \in M$, define un producto interno en $T_p M$. Por lo tanto, podemos definir la longitud de un vector tangente en p por $\|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$. Observe que si M es espacio euclidiano \mathbb{R}^n y h es el mapa identidad, entonces g_p es simplemente la matriz identidad, y la Fórmula (3) coincide con el producto punto habitual.

Si dotamos a cada espacio tangente (uno por cada punto $p \in M$) con un producto interno como ese, llegamos al concepto de métrica riemanniana:

Una *métrica riemanniana* de una variedad lisa M es una asignación de un producto interno en cada espacio tangente de M que varía suavemente.

Como ejemplo, midamos la longitud del gran círculo en la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 , parametrizada (en coordenadas estereográficas) por $\alpha(t) = \left(0, \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}\right)$, $0 < t < 2\pi$. Su velocidad al tiempo t es el vector tangente $\dot{\alpha}(t) = \left(0, \frac{1}{\cos(t)-1}\right)$.

Usando la Fórmula (2) y la inversa del difeomorfismo (1), es fácil (aunque bastante tedioso) demostrar que esta métrica riemanniana está dada, en coordenadas estereográficas, por la matriz ^[1]

$$g_{(x,y)} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

^[1] De manera técnica, esta fórmula proporciona un producto interno al espacio tangente de $(x, y) \in \mathbb{S}^2$. La métrica riemanniana \mathbb{S}^2 es la colección de todos estos productos internos.

y por lo tanto en el punto $\left(0, \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}\right)$ la métrica es

$$\frac{4}{\left(1 + \frac{\sin^2(t)}{(1-\cos(t))^2}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora usando la fórmula (3) encontramos $\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{g_{\left(0, \frac{\sin t}{1-\cos(t)}\right)}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t))} =$

1. Por lo tanto, la longitud de la curva es

$$\int_0^{2\pi} \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

En general, cada variedad lisa $M \subset \mathbb{R}^k$ puede dotarse de una métrica riemanniana restringiendo el producto punto de \mathbb{R}^k a los espacios tangentes de M . Si una métrica g coincide con esta métrica inducida, decimos que M está *encajada isométricamente* en \mathbb{R}^k . Es de esta manera que podemos visualizar métricas riemannianas particulares (al menos para $k \leq 3$) y es como las figuras de todas las métricas riemannianas siguientes deben ser entendidas. \square

Resumamos lo que tenemos hasta ahora: el objeto de estudio es una variedad suave, que no es más que un espacio localmente difeomorfo al espacio euclidiano \mathbb{R}^n . En cada punto de una variedad lisa existe un espacio tangente, que es un espacio vectorial que puede dotarse de forma natural de un producto interno. La colección de todos estos productos internos (uno para cada punto de la variedad suave) es lo que llamamos una métrica riemanniana. Esta última es el dispositivo que utilizamos para dar sentido a los ángulos y longitudes de vectores, etc. De ahora en adelante nos referiremos a las variedades suaves con una métrica riemanniana como *variedades riemannianas*.

3. Curvatura

Si bien las variedades suaves se han definido como objetos contenidos en algún espacio (euclidiano) circundante, es posible hablar de sus propiedades geométricas locales *intrínsecas*. En términos generales, estas son cantidades que pueden ser percibidas en una vecindad de un punto por una criatura “viviendo” en la variedad suave sin tener que hacer referencia al espacio circundante. Si piensas por un rato, es realmente difícil encontrar una propiedad *local* que distinga entre las variedades suaves y el espacio euclidiano. Solo recuerda que antes de que se desarrollara la cosmología científica griega, las personas de otras

\square Para valores particulares de k no es fácil decidir si existe un encaje isométrico en \mathbb{R}^k , aunque el llamado teorema de inmersión de Nash asegura que existe un encaje isométrico para ciertos k mucho más grandes que n .

culturas europeas pensaban que la superficie de la Tierra era plana. Pero, ¿no es esto perdonable cuando olvidamos por un momento nuestro conocimiento moderno y echamos un vistazo a lo que nos rodea? Como en el caso de la Tierra, las variedades suaves son en general, por definición, entidades homogéneas en el sentido de que se ven iguales en vecindades de cada punto, es decir, localmente no son diferentes del espacio euclidiano. Entonces, en principio, una criatura que vive en una variedad suave no tiene medios para decidir en qué clase de variedad vive simplemente mirando alrededor del punto en el que se encuentra. Esto cambia si tenemos en cuenta la geometría de la variedad descrita por una métrica riemanniana. Fue Carl Friedrich Gauss (1777–1855) quien se dio cuenta por primera vez de que dicha estructura da lugar a una propiedad intrínseca adicional llamada *curvatura*. En realidad, Gauss estudió superficies regulares en \mathbb{R}^3 y sólo más tarde Bernhard Riemann (1826–1866) formalizó y generalizó estas noción a variedades de dimensiones superiores. Que la curvatura sea una propiedad intrínseca de las variedades riemannianas es un hecho tan sorprendente y notable que el propio Gauss se refirió a este descubrimiento como *Teorema Egregium*, que es la expresión latina de *teorema extraordinario*.

La curvatura de una métrica riemanniana es una medida de cuán “intrínsecamente distorsionada” está la variedad con respecto al espacio euclidiano. De hecho, supón que estás parado en algún punto p de una superficie lisa M y enciende una luz de cabeza. La luz de cabeza creará un cono de luz^[3] en M determinado por dos vectores tangentes $v, w \in T_p M$. Después de un tiempo muy corto t , el cono de luz que tendría un ancho de L en un espacio euclidiano te parecerá que tiene un ancho aproximadamente igual a

$$L \left(1 + K_{v,w} \frac{t^2}{6} \right)$$

para algún coeficiente $K_{v,w}$, que depende de qué tan intrínsecamente distorsionada este M en el punto p .^[4] Al número $K_{v,w}$ usado arriba lo llamamos la curvatura seccional de v y w en p . En una variedad de dimensión superior podemos pensar en la luz emitida en un cono bidimensional generado por dos vectores tangentes para introducir la misma noción. Toma en cuenta que si $K_{v,w}$ es positivo, el cono de luz parecerá más ancho que un cono en el plano euclidiano. Esto ocurre en la esfera con la métrica definida en (4). En realidad, en ese caso tenemos $K_{v,w} = 1$. Y si $K_{v,w}$ es negativo, entonces el cono de luz parecerá más estrecho que un cono en el plano euclidiano.

La Figura 4 muestra algunos ejemplos de variedades suaves bidimensionales con conos de luz distorsionados.

[3] Se debe entender que la “luz” en nuestra variedad viaja por los caminos más cortos.

[4] Esto es difícil de comprobar con las herramientas que tenemos ahora, pero lo remitimos al [1, Capítulo 5] para ver como se demuestra esto.

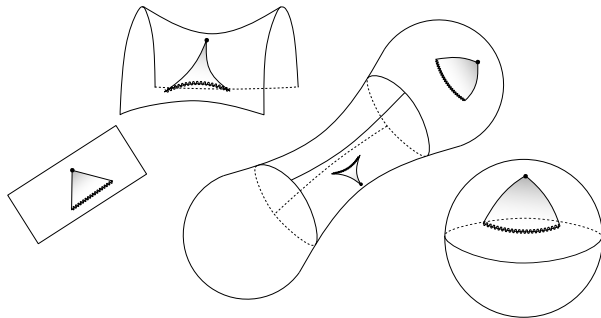


Figura 4: La curvatura positiva hace ver a los conos de luz más anchos, mientras que la curvatura negativa los hace ver más estrechos. El hecho de ser plano corresponde a tener curvatura cero. El ancho de los conos de luz está resaltado con líneas curvadas y la luz es emitida por los puntos sólidos.

4. Deformaciones

Hasta ahora hemos estado lidiando solamente con una métrica riemanniana en una variedad suave. Pero a la misma variedad se le podrían dar muchas más métricas riemannianas. Pensemos en la métrica redonda en la esfera definida en (4).^[5] Podemos crear una nueva métrica multiplicando a la métrica redonda por un número positivo constante, digamos 100. Entonces la nueva métrica en \mathbb{S}^2 es

$$h_{(x,y)} = 100 \cdot g_{(x,y)} = \frac{400}{(1+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visto con esta nueva métrica, el círculo mayor que pasa por el polo norte y el polo sur que solía tener una longitud de 2π ahora tendrá una longitud de 20π . Y no solo las distancias se hacen más grandes, sino que la variedad suave se verá menos distorsionada. De hecho, en el caso en cuestión, la métrica h es redonda con curvatura seccional constante reducida a $1/100$.

Una pregunta que surge es si esta disminución en la curvatura puede verse como consecuencia de algún tipo de proceso de evolución en temporal que hizo que la métrica g mutara en un período de tiempo en la métrica h . En realidad, en este caso podemos modelar el cambio de una métrica a otra como un proceso continuo simplemente “trazando una línea recta de métricas” entre g y h , es

^[5] A una métrica riemanniana en la esfera la llamamos *redonda* si tiene curvatura seccional constante. La variedad en la parte inferior derecha de la Figura 4 es una esfera redonda.

decir, para cada $t \in [0, 1]$ podemos definir una nueva métrica g^t en la esfera por

$$g^t = (99t + 1)g. \quad (5)$$

Observe que la métrica inicial ($t = 0$) es g y la métrica final ($t = 1$) es h , por lo que acabamos de construir una deformación continua de una métrica riemanniana en otra. Algunos pasos de este proceso de deformación se muestran en la Figura 5.

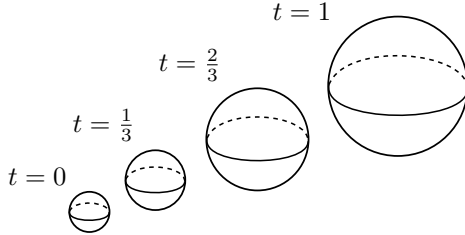


Figura 5: Representación de una “línea recta” conformada de métricas en la esfera.

Sin embargo, no todas las métricas riemannianas de la esfera son redondas. De hecho, la superficie más grande en la Figura 4 representa una métrica riemanniana en la esfera que tiene curvatura positiva en algunos puntos y curvatura negativa en otros. Podríamos preguntarnos de forma más general si *cualquier* métrica riemanniana \tilde{g} en la esfera \mathbb{S}^2 puede obtenerse mediante una deformación continua de la métrica redonda g (o viceversa). La respuesta es sí. ¿Cómo? Pues... de nuevo, uniéndola a las métricas con una línea recta! Es decir, para cada $t \in [0, 1]$ la ecuación

$$g^t = tg + (1 - t)\tilde{g} \quad (6)$$

define una familia a 1-parámetro (es decir, una deformación continua) de métricas riemannianas de \mathbb{S}^2 , de modo que la métrica inicial es g y la métrica final es \tilde{g} .

El punto es que ahora la deformación definida en (6) puede ser insatisfactoria si queremos controlar la curvatura durante la deformación. Por ejemplo, parece natural exigir que la deformación de la esfera redonda permanezca curvada positivamente en todo momento. Pero, ¿se puede lograr esto con *cualesquiera* dos métricas riemannianas de \mathbb{S}^2 curvadas positivamente?

En primer lugar, no hay razón para pensar que nuestra sencilla deformación definida en (6) retendrá cualquier condición de curvatura. Esto se debe en parte a la dependencia no lineal de la curvatura de la métrica riemanniana.

De hecho, toma mucho trabajo responder esta pregunta. Una forma de abordar el problema es considerando una métrica riemanniana \tilde{g} como la condición

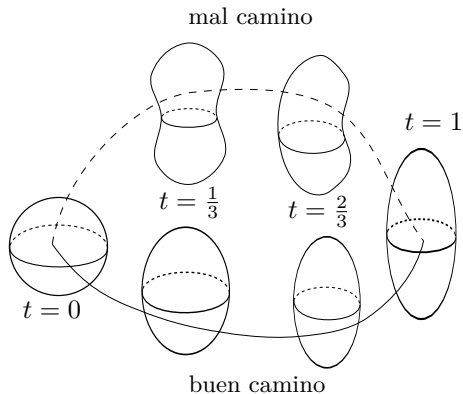


Figura 6: Trayectorias que unen a dos métricas de \mathbb{S}^2 curvadas positivamente. Una pasa por métricas con un poco de curvatura negativa (mal camino), la otra pasa por métricas con curvatura positiva (buen camino).

inicial de cierto sistema de ecuaciones diferenciales parciales, conocido como flujo de Ricci, llamado así por Gregorio Ricci-Curbastro (1853 – 1925). Richard Hamilton [3] mostró en 1986 que existen soluciones de estas ecuaciones. Estas soluciones consisten de métricas riemannianas g^t en \mathbb{S}^2 , una para cada tiempo $t \geq 0$. En otras palabras, el flujo de Ricci nos da naturalmente una deformación continua de la métrica inicial \tilde{g} . Lo que es aún más interesante y que también fue demostrado por Hamilton, es que si la condición inicial \tilde{g} en \mathbb{S}^2 fuera una métrica curvada positivamente, entonces todas las métricas “deformadas” g^t permanecen curvadas positivamente (como el buen camino de la Figura 6). Además, Hamilton demostró que a medida que pasa el tiempo, la curvatura de estas métricas no solamente se mantiene positiva, sino que también evoluciona distribuyéndose al final uniformemente en toda la esfera; en otras palabras, ¡la esfera eventualmente se vuelve redonda! En resumen:

Cada métrica riemanniana de \mathbb{S}^2 positivamente curvada puede deformarse, a través de métricas positivamente curvadas, a una con curvatura constante.

Solamente hemos discutido el caso muy especial de la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 , pero la pregunta general que intentamos responder es la siguiente:

Dada una variedad suave M y dos métricas riemannianas g y \tilde{g} en ella con alguna restricción geométrica (por ejemplo, que sus curvaturas tengan algún límite superior o inferior específico), ¿es posible obtener

\tilde{g} mediante una deformación continua de g de métricas riemannianas que mantienen la misma restricción geométrica?

Para la mayoría de las variedades suaves y restricciones geométricas, esta es una pregunta ampliamente abierta (que se ha discutido varias veces en el Instituto de Investigación Matemática de Oberwolfach). Déjenos señalar que la situación en dimensiones superiores es complicada, en parte porque los métodos que utilizan ecuaciones diferenciales parciales (como el flujo de Ricci) son muy difíciles de manejar. Sin embargo, se han obtenido algunos resultados utilizando herramientas de topología algebraica, topología geométrica y teoría del índice. El lector interesado debería consultar el libro de Wilderich Tuschmann y David Wraith [5], en el que los autores recopilan y explican muchos de los resultados conocidos respecto a esta pregunta. Para dejarle ir con una idea de cuán diferentes son las cosas cuando escapamos del rango dimensional inferior e imponemos restricciones de curvatura diferentes, mencionamos que Francis Thomas Farrell y Pedro Ontaneda demostraron en [2] que existen variedades suaves de dimensión 10 a las que se le pueden dar un número infinito de métricas riemannianas con curvatura negativa constante -1 que *no* pueden ser deformadas la una en la otra a través de métricas *curvadas negativamente*. Además, Hitchin pudo exhibir en [4] dos métricas en una esfera de dimensión 8 con curvatura positiva que no pueden unirse mediante una deformación de métricas curvadas positivamente.

Referencias

- [1] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry. Translated from the Portuguese by Francis Flaherty*, Birkhäuser, 1992.
- [2] F. T. Farrell y P. Ontaneda, *On the topology of the space of negatively curved metrics*, Journal of Differential Geometry **86** (2010), nº 2, 273–301, <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1299766789>.
- [3] R. S. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Mathematics and general relativity, Contemporary Mathematics, vol. 71, American Mathematical Society, 1988, págs. 237–262, <https://doi.org/10.1090/conm/071/954419>.
- [4] N. Hitchin, *Harmonic Spinors*, Advances in Mathematics **14** (1974), nº 1, 1–55, [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(74\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0001-8708(74)90021-8).
- [5] W. Tuschmann y D. J. Wraith, *Moduli spaces of Riemannian metrics*, Birkhäuser/Springer, 2015.

Mauricio Bustamante *es postdoc en la Universidad de Augsburg, Alemania.*

Jan-Bernhard Kordaß *es estudiante de doctorado en el Instituto de Tecnología de Karlsruhe, Alemania.*

Traducido del inglés por
Raquel Perales

Tema matemático
Geometría y Topología

Licencia
Creative Commons BY-SA 4.0

DOI
10.14760/SNAP-2017-010-ES

Las *Instantáneas de la actualidad matemática desde Oberwolfach* ofrecen una mirada a investigación matemática más reciente. Estos textos están escritos por los participantes en el programa científico del Instituto de Investigación Matemática de Oberwolfach (MFO). El proyecto de las instantáneas está concebido para promover el conocimiento y el aprecio por la matemática moderna y la investigación matemática entre todo el público interesado internacionalmente.

Todas las instantáneas se publican en cooperación con la plataforma IMAGINARY y pueden encontrarse en www.imaginary.org/es/snapshots y en www.mfo.de/snapshots.

ISSN 2626-1995

Editoras

Anja Randecker y Sophia Jahns
junior-editors@mfo.de

Editora en jefe

Carla Cederbaum
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9–11
77709 Oberwolfach
Alemania

Director
Gerhard Huisken



Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach



IMAGINARY
open mathematics