 № 3/2023

Felder und Räume: Symmetrie und Lokalität in Mathematik und theoretischen Wissenschaften

Ingmar Saberi[1]

Wir werden einige grundlegende Ideen der Eichtheorie und der dazugehörigen Differentialtopologie erkunden. Damit kann sich die Leserin ein Bild des Modulraums flacher Zusammenhänge machen und ihn mit den physikalisch motivierten Ideen dahinter in Beziehung bringen. Den Begriffen von Symmetrien und Feldern gehen wir gründlich nach. Außerdem werfen wir einen flüchtigen Blick auf unendliche Symmetrie in zwei Dimensionen und auf vor kurzem entdeckte Verallgemeinerungen.

Vorwort

Bedauerlicherweise erscheint die Mathematik manchmal als eine einsame, mit grimmigen Türmen ausgestattete und von einem breiten Festungsgraben umgebene Burg. Eine, die sich mit aller Absicht von der restlichen Welt abgegrenzt hat; sie hat ihre Knechte, die sich kämpfend allmählich dem Turm annähern oder drinnen emporsteigen, und ihre Mäzene, welche die zu unerreichbaren

[1] Die Forschung von Ingmar Saberi wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert, im Rahmen des Exzellenzclusters STRUCTURES an der Universität Heidelberg.

Göttern Gewordenen oben drauf anbeten und deren Festung weiter ausbauen. Aber die Ziele, Anstrengungen und Erfolge dieses etwas eigenartigen Ordens – geschweige denn seine verworrene, selbstbezogene Hofpolitik – bleiben den nicht beteiligten Menschen verschleiert und rätselhaft.

So muss es jedoch nicht sein. Die Mathematik ist eine Sprache, oder eine Kunst, wie jede andere; viele ihrer Objekte leiten sich schließlich aus Vorkommnissen und Gegenständen des Alltags her, und lassen sich auch einigermaßen gut mittels der Alltagssprache begreifen. Sie genießt auch eine enge Beziehung zur Naturwissenschaft, deren Thema ja menschliche Kenntnisse weltlicher Sachverhalte ist, und deshalb keineswegs vom „echten Leben“ abzugrenzen ist.[2]

Deswegen habe ich mich sehr gefreut, als sich die Möglichkeit ergab, einen „Schnappschuss moderner Mathematik aus Oberwolfach“ zu verfassen. Ich werde hier versuchen, zwischen meiner Ecke der Mathematik und der restlichen Welt die Brücke zu schlagen, die sich mir anzubieten scheint. Dazu wird es nötig, einige Begriffe einzuführen, die in der Sprache der mathematischen Physik vorkommen; später werden auch ein paar Vorkenntnisse vorausgesetzt. Aber nicht erschrecken – wir fangen häppchenweise an.

1 Was zeichnet eine Feldtheorie aus?

1.1 Felder

In der Physik bezeichnet man als *Feld* eine Menge oder messbare Zahl, deren Wert sowohl zeitabhängig als auch ortsabhängig ist.

Jedem fallen bestimmt Beispiele dazu ein: Ich könnte sagen, dass die Temperatur 14 Grad beträgt. Diese Angabe ist für dich aber wertlos, es sei denn, du wüsstest, auf welchen Ort und welche Zeit sie sich bezieht. Dass es am 25. November 2019 um 14 Uhr in Saarbrücken 9 Grad war, ist eventuell eine wertvolle Information. Die Temperatur ist also ein Feld in diesem Sinne.

Dieses Feld besteht für jeden Ort und jede Zeit nur aus einer einzigen messbaren Zahl: mehr als den Wert von 9 Grad kann man zur Temperatur in Saarbrücken eigentlich nicht sagen. Wenn ich aber vom Wind in Saarbrücken berichten möchte, ist es sinnvoll, zur Angabe seiner Stärke auch eine *Richtung* anzugeben. Das Feld der Winde besteht also aus zwei messbaren Zahlen: einer Stärke und einem Winkel, mit dem der Wind mich trifft. Diese Angaben kann ich statt mit Stärke und Richtung auch mit zwei Geschwindigkeiten ausdrücken: die wären, zum Beispiel, die Geschwindigkeit des Windes gerade ins Gesicht

[2] Zu diesem Punkt, vor allem zur mathematischen Modellierung physikalischer Systeme in der Quantenmechanik, ist eine Lektüre [10] von W. Pauli sehr zu empfehlen; der bekannte Vortrag [16] von E. Wigner handelt auch von der Beziehung zwischen Mathematik und Naturwissenschaft.

und quer ins rechte Ohr. Es werden für beide Möglichkeiten zwei verschiedene Zahlen gebraucht, um eine vollständige Angabe zu machen.

Hier ist ein ganz wichtiger Punkt zu beachten: Ich kann natürlich eine zweizahlige Angabe machen, indem ich sowohl die Temperatur als auch den Luftdruck nenne. Das wird in der Wettervorhersage ja teilweise auch gemacht. So eine Angabe unterscheidet sich jedoch von der des Windes dadurch, dass die beiden Zahlen *klar voneinander getrennt werden dürfen.* „Klar“ heißt hier, dass die Trennung vom Berichterstatter komplett unabhängig ist. Das ist mit den Windgeschwindigkeiten natürlich nicht der Fall. Ich kann zwar sagen, ohne gelogen zu haben, dass mir in Saarbrücken der Wind direkt ins Gesicht weht, doch biege ich danach in die Hafenstraße links ab, bläst mir der Wind ins rechte Ohr. Die beiden Geschwindigkeiten könnten also miteinander verrechnet werden, sobald ich mich drehe.

Nun willst du vielleicht schon Einspruch erheben: Ist es nicht einfach blöd, zu sagen, dass mir der Wind ins rechte Ohr bläst? Hätte ich nicht lieber sagen sollen, dass zum Beispiel *Nordwind* weht? Dann wäre die Angabe doch klar gewesen… Aber so eine Benennung ist eigentlich nur die Anweisung: nimm dir einen Kompass, und dreh dich in die Richtung, die er zeigt; dann weht dir der Wind ins Gesicht. Wesentlich ist beim Beispiel des Windes, dass unsere Angaben von *irgendeinem* Bezugssystem abhängen; dass Temperatur und Luftdruck unverändert bleiben, der Wind jedoch seine Richtung ändert, wenn wir uns drehen.

Der Physiker oder die Mathematikerin sagt zu diesen Beispielen, dass es sich bei den Angaben von Temperatur und Luftdruck um „zwei Skalarfelder“ handelt,[3] und dagegen bei den Angaben für den Wind um „ein Vektorfeld“. Ein Skalarfeld ist also ein absoluter Wert, ein Vektorfeld aber etwas, das zeit- und ortsabhängig *in eine Richtung zeigt.*

Wir können uns andere Arten von Feldern denken. Hier muss ich noch eine besonders wichtige Art vorstellen, die auch im Alltag vorkommt. Ich kann mir zum Beispiel eine Wanderkarte der Umgebung von Saarbrücken anschauen; und wenn es eine anständige Wanderkarte ist, dann werden darauf Höhenlinien angegeben sein. Die Höhenlinien sind ortsabhängig; sie können überall angegeben werden, und im Prinzip (da sich ja die Erde allmählich verändert) hängen sie auch von der Zeit ab. Sie sind also auch ein Feld, und was sie aussagen, besteht auch aus einer Stärke und einer Richtung: wesentlich ist, wie nah aneinander die Linien sind, und wo sie lang verlaufen.

Jedoch bilden die Höhenlinien *kein* Vektorfeld! Sie *zeigen* mir keine Richtung, in die ich gehen könnte. Sagst du mir, dass ich drei Meter aufsteigen soll, bleiben mir verschiedene Möglichkeiten offen: die Anweisung ist nicht eindeutig. Eher

[3] Wobei die Mathematikerin hier wohl einfach „Funktionen“ sagen würde.

sagen sie mir, wenn ich mir eine Richtung vornehme, wie steil es in dieser Richtung wird (das heißt, wie schnell sich die Höhe verändert).[4] Anders gesagt: Zu jeder Bewegung, die ich machen könnte, zeigen die Höhenlinien an, um wie viele Meter sich meine Höhe ändern wird. Diese Angabe hängt nur von meinem Anfangs- und Ankunftsort ab, nicht von meinem genauen Weg.

Zu der Behauptung, dass die Höhenlinien kein Vektorfeld sind, fragst du dich vielleicht, ob ich nicht schon wieder doof gewesen sei. Man könne ja den Höhenlinien *entlang* gehen, das sei doch eine Richtung! Und recht hast du auch – aber nur durch Zufall. Die Höhenlinien sind ja geometrische Orte, die dadurch bestimmt sind, dass die Höhe (also ein bestimmtes Skalarfeld) jeder Linie entlang überall gleich bleibt. Stell dir vor, wir machen eine ähnliche Karte, aber für den Luftdruck, überall in der Erdatmosphäre. Dann hängt dieses Feld von drei Ortsangaben ab, statt von zweien; dementsprechend müssen die Höhenlinien durch „Isobaren" ersetzt werden, die jetzt die *Flächen* des gleichbleibenden Luftdrucks sind. Und so eine zweidimensionale Fläche zeigt in keinerlei bestimmte Richtung; die Isobaren auch nicht.

Felder wie die Höhenlinien oder die Isobaren nennen sich *Differentialformen;* insbesondere stellen beide Beispiele eine „geschlossene Eins-Form" dar. Die Höhenlinien gehören aber zu einem zweidimensionalen Raum (der Oberfläche der Erde rund um Saarbrücken), die Isobaren zu einem dreidimensionalen Raum (der Luftschicht *oberhalb* der Umgebung von Saarbrücken). Geschlossen sein heißt, dass sich die lokalen Angaben unseres Feldes zu einem stetigen Ganzen zusammensetzen lassen, und sich glatte,[5] durchgehende Höhenlinien, beziehungsweise Isobaren, ergeben. Anders ausgedrückt: Die Angabe des Höhenunterschieds hängt nur von den Endpunkten des Weges ab. (Kannst du dir eine Eins-Form ausdenken, die *nicht* geschlossen ist?)

In unseren bisherigen Beispielen wurden die Eins-Formen aus Skalarfeldern konstruiert: Sie sind im Wesentlichen eine Art von Ableitung des Skalarfeldes und zeigen mir dessen Änderung entlang jedem Pfad, den ich gehen könnte, an. Davon leitet sich auch der Begriff „Differentialform" her. Wenn wir uns erlauben, ein paar Formelzeichen zu benutzen, können wir folgendes schreiben: Sei U die Umgebung von Saarbrücken mit Koordinaten x und y, die meine Entfernung nach Osten, beziehungsweise Norden, vom Saarbrücker Schloss angeben und sei h die Höhe meines Standorts. Dann schreibt man

$$h \in C^\infty(U, \mathbb{R}),$$

[4] Höhenlinien und Vektorfelder sind also *dual* im mathematischen Sinne; sie lassen sich miteinander paaren, und daraus ergibt sich eine Zahl (oder genauer gesagt ein Skalarfeld).

[5] „Glatt" zu sein bedeutet für eine Abbildung h, dass h stetig ist und dass h beliebig oft abgeleitet werden kann und jede Ableitung wieder stetig ist. Nicht-glatte Abbildungen kommen im Alltag eher selten vor.

um auszudrücken, dass h eine Abbildung von U nach $\mathbb{R}$ (also die reellen Zahlen) ist, die glatt ist. Es gibt auch eine Beschreibung durch Formelzeichen für die dazugehörige Eins-Form, die von den Höhenlinien dargestellt wird; das sieht so aus:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy \in \Omega^1(U, \mathbb{R}).$$

Hier bezeichnet $\Omega^1(U, \mathbb{R})$ die Menge aller Eins-Formen auf U, die als Werte reelle Zahlen liefern.

Zum Schluss müssen wir noch auf zwei Dinge aufmerksam machen: erstens, es kann durchaus geschlossene Eins-Formen geben, die *keine* Ableitungen von Skalarfeldern sind! Ein Beispiel haben wir bei der Windrichtung schon gesehen: der Winkel, der meinen Standort auf einem Kreis darstellt. Bewege ich mich in eine Richtung auf dem Kreis, kann ich auch eindeutig sagen, wieviel sich der Winkel geändert hat; die *Änderung des Winkels* ist also eine Eins-Form. Jedoch ist diese Änderung, sobald ich einmal um den Kreis herumgehe, *nicht* gleich null, sondern 2π. Der Winkel ist also kein eindeutiges Skalarfeld.

Dass es Eins-Formen dieser Art gibt, hat tiefgreifend mit der Tatsache zu tun, dass der Kreis ein „Loch“ hat, um das die Eins-Form herumkreisen darf. In der Topologie misst man die Löcher eines Raumes, in verschiedenen Dimensionen, mittels der Differentialformen darauf.

Zweitens, wie der Name schon verspricht, kann es Differentialformen eines jeden Grades geben: Zwei-Formen, Sieben-Formen, und so weiter. So, wie eine Eins-Form uns zu jedem eindimensionalen Pfad eine Zahl oder andere Angabe gibt, gibt eine Zwei-Form auf einem Raum zu jeder zweidimensionalen Fläche in diesem eine Zahl. So ist zum Beispiel das Flächenmaß auf der Erde eine Zwei-Form. Wie der Winkel als Eins-Form auf das Loch im Kreis hinweist, so können wir auch hier das zweidimensionale Loch, das Erdinnere sozusagen, feststellen: wir könnten mit einer riesigen Decke die Fläche eines Teils der Erde messen, aber sobald die Decke so groß ist, dass sie überlappt, stimmt der Flächeninhalt des Erdteils nicht mehr mit dem Flächeninhalt der Decke überein.

1.2 Feldtheorien

Eine *Feldtheorie* beschreibt die Dynamik eines Feldes. Die Felder, die hier in der Physik in Frage kommen, sind verschiedenerlei: sie können sowohl die Schwingungen eines gestreckten Seiles oder eines vibrierenden Körpers darstellen, als auch Licht (das elektromagnetische Feld), das Schwerefeld, oder sogar andere Elementarteilchen. Diese kleinsten Bausteine aller Gegenstände und Kräfte werden in der heutigen Physik mit der „Quantenfeldtheorie“ beschrieben. Jedoch bleiben wir hier bei Beispielen, die sich etwas einfacher handhaben lassen.

Sei h also die Höhenangabe eines Punktes auf einer Saite; man kann sich ein straffes Seil vorstellen, oder die Saite einer Geige. Diese Höhe hängt sowohl von der Zeit t als auch von einer Ortsangabe x der Saite entlang ab. Die Höhe ist also ein Skalarfeld. Wie sieht in diesem Falle das zweite Newton'sche Gesetz aus?[6] Hier müssen wir sowohl die Masse je Längeneinheit λ als auch die Spannungskraft σ angegeben bekommen. Die Masse eines winzigen Abschnitts der Saite von Länge dx beträgt dann $\lambda\, dx$, und dessen Beschleunigung ist d^2h/dt^2. Ebenso kann man ausrechnen, dass die Kraft, die darauf wirkt, proportional zur lokalen Krümmung ist; genauer gesagt beträgt diese Kraft $k\, dx \cdot d^2h/dx^2$. Daraus ergibt sich folgende Wellengleichung:

$$dx \cdot \left(\lambda \frac{d^2}{dt^2} - k \frac{d^2}{dx^2}\right) h(t,x) = 0.$$

Die Länge des winzigen Abschnitts dx wird unwesentlich und darf also gekürzt werden. Wir können auch eine *Wellengeschwindigkeit,* $c = \sqrt{k/\lambda}$, bilden; auf die Lösungen hat nur diese Größe einen Einfluss. Diese Formel entspricht der Tatsache, dass eine Saite tiefer klingt, je schwerer sie ist oder je lockerer sie gespannt ist.

Diese Wellengleichung können wir auch ganz einfach lösen, durch einen besonderen Zufall. Sie lässt sich nämlich folgenderweise aufteilen:

$$\left(\frac{d}{dt} - c\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dt} + c\frac{d}{dx}\right) h(t,x) = 0.$$

Wir können also unsere ursprüngliche Gleichung durch zwei einfachere ersetzen, nämlich:

$$\left(\frac{d}{dt} - c\frac{d}{dx}\right) h(t,x) = 0, \qquad \left(\frac{d}{dt} + c\frac{d}{dx}\right) h(t,x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung sieht dann so aus:

$$h(t,x) = f_+(x+ct) + f_-(x-ct).$$

Die f_+ und f_- sind *beliebige* Funktionen; sie stellen eine frei wählbare Krümmung oder Umformung der Saite dar, die sich mit Geschwindigkeit c *gleichmäßig nach links, beziehungsweise rechts, bewegt.* Mit einem langen Seil kann man sich schnell überzeugen, dass diese Lösungen auch dem Sachverhalt entsprechen.

Solche Gleichungen sind der Kern der Feldtheorie; in der Tat besteht der Ausgangspunkt einer jeden Feldtheorie aus einer bestimmten Wellengleichung oder mehreren verschiedenen Wellengleichungen. Diese lassen sich nicht immer so einfach lösen wie für die Saite, doch wer sich Wellen auf der Fläche des Meeres oder dergleichen vorstellt, liegt damit nicht falsch.[7]

---

[6] Das zweite Newton'sche Gesetz besagt, dass, wenn auf einen Körper eine resultierende Kraft wirkt, der Körper in die Richtung der Kraft beschleunigt wird.

[7] Siehe beispielsweise [9], wo auch abelsche Eichtheorien vorkommen.

2 Symmetrie

Symmetrie ist schon ein etwas geläufigerer Begriff, doch müssen wir kurz erklären, wie sich die Mathematiker eine Symmetrie vorstellen. Man schaut die Gesamtmenge aller möglichen Bewegungen eines Gegenstandes an, die dessen Struktur nach der Bewegung genau gleich wie davor aussehen lassen. Wenn man beispielsweise ein quadratisches Blatt Papier hat, kann man es um 90 Grad drehen; nach vier solchen Drehungen kommt das Blatt wieder in die Ausgangsposition zurück. Und dazu, wenn beide Seiten des Blattes dieselbe Farbe haben, kann man es auch *umdrehen* oder drehen und umdrehen, so dass sich eine Gesamtzahl von acht möglichen Bewegungen ergibt.

Welche Eigenschaften hat so eine Gesamtmenge von Symmetriebewegungen? Zuerst kann sie nicht komplett leer sein; es besteht ja immer die Möglichkeit, einfach *gar nichts* zu machen, auch wenn der Gegenstand „keine Symmetrie hat"; in diesem Falle ist diese Null-Bewegung die einzige Symmetriebewegung. Ich kann zwei Bewegungen natürlich immer *nacheinander* machen, also verknüpfen; dadurch ensteht aus zwei aufeinanderfolgenden Bewegungen eine dritte, die auch eine Symmetrie sein muss. Und jede mögliche Bewegung lässt sich auch rückwärts machen, damit die neue Stellung des Gegenstandes zurück in die ursprüngliche übergeht.

In der modernen Mathematik macht man jetzt folgenden Sprung: man lässt den Gegenstand, auf den diese Bewegungen ausgeübt werden, einfach weg, und betrachtet *nur diese Gesamtmenge der Symmetrien mit den gerade beschriebenen Eigenschaften.* Eine mit solchen Strukturen ausgestattete Menge nennt sich eine *Gruppe*, und stellt ein mögliches Beispiel von Symmetriebewegungen dar. Ein Gegenstand, dessen Symmetriebewegungen dann genau so aussehen, besitzt eine *Wirkung* oder *Darstellung* dieser Gruppe.[8]

Betrachten wir nochmal das Beispiel des quadratischen Blattes, und führen wir ein paar Formelzeichen ein: Wir schreiben e für die Null-Bewegung und r für eine Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn. Dann haben wir schon vier mögliche Bewegungen:

$$e,\ r,\ r^2,\ r^3,$$

wobei die Tatsache, dass $r^4 = e$ ist, natürlich beachtet werden muss. Diese Menge bildet schon eine Gruppe: sie wirkt auf das Blatt als die Gruppe von Symmetrien, die möglich sind, wenn die Oberseite des Papiers auch oben bleiben sollte.

Lassen wir auch Umdrehen zu, ergibt sich die schon erwähnte Gruppe von acht Bewegungen, die schon viel interessanter ist. Da dürfen wir das Blatt umdrehen, indem der obere Rand nach unten kommt; diese Bewegung nennen wir u. Dann ist schon klar, dass $u^2 = e$ gelten muss; eine vollständige Tabelle

[8] Näheres über die Gruppentheorie gibt es in vielfältigen Quellen, beispielsweise [15].

	e	r	r^2	r^3	u	ur	ur^2	ur^3
e	e	r	r^2	r^3	u	ur	ur^2	ur^3
r	r	r^2	r^3	e	ur^3	u	ur	ur^2
r^2	r^2	r^3	e	r	ur^2	ur^3	u	ur
r^3	r^3	e	r	r^2	ur	ur^2	ur^3	u
u	u	ur	ur^2	ur^3	e	r	r^2	r^3
ur	ur	ur^2	ur^3	u	r^3	e	r	r^2
ur^2	ur^2	ur^3	u	ur	r^2	r^3	e	r
ur^3	ur^3	u	ur	ur^2	r	r^2	r^3	e

Tabelle 1: Die Verknüpfung einer Gruppe mit acht Elementen.

der Verknüpfung lässt sich einfach bestimmen, und steht hier als Tabelle 1. Zum Erstellen der Tabelle haben wir die Gleichung $uru = r^3$ benutzt; von deren Gültigkeit kann sich jeder mit Hilfe eines quadratischen Blattes überzeugen.

Zu dieser Tabelle sind ein paar Anmerkungen zu machen: Erstens, die erste Gruppe (die die Oberseite des Blattes unverändert lässt) zeigt sich, in der oberen linken Ecke der Tabelle, als in der größeren Gruppe enthalten; sie bildet also eine *Untergruppe* davon. Zweitens macht die Reihenfolge der Symmetriebewegungen auch etwas aus: in unserer Schreibweise heißt beispielsweise ur erst r ausführen, und danach u. ru ist dann *nicht* gleich ur, sondern ur^3! Es handelt sich um eine „nicht-abelsche Gruppe“; dagegen ist die beschriebene Untergruppe eine abelsche, und die Reihenfolge der Formelzeichen daher egal. Viele Bewegungen im täglichen Leben sind nicht miteinander vertauschbar; wenn ich den Lenker des Fahrrads nach links drehe und danach zehn Meter radle, lande ich woanders, als wenn ich erst nach vorne geradelt wäre und danach den Lenker gedreht hätte.

Wir haben bis jetzt nur Gruppen angeschaut, die aus endlich vielen Symmetriebewegungen bestehen. Dies ist aber keine allgemeine Eigenschaft und unendliche Gruppen spielen in der Physik eine besonders wichtige Rolle. Wir nehmen uns also ein kleines Beispiel vor: die Gruppe von Symmetrien eines Kreises. Die möglichen Symmetriebewegungen dürfen hier mit einem Winkel bezeichnet werden, da jede Symmetrie aus einer Drehung besteht; die Gruppe bildet selber einen glatten Raum, der gleich dem Kreis ist, und den Namen $SO(2)$ trägt. Ähnlicherweise könnte man die Gruppe von möglichen Drehungen eines Globus betrachten; diese Gruppe wird von den Mathematikern $SO(3)$ genannt.[9]

Hier müssen wir kurz einen Punkt aufklären, um den wir schon ein bisschen herumgeeiert haben. Als wir Vektorfelder und geschlossene Eins-Formen be-

[9] Die Bezeichnung $SO(n)$ ist nur die Kurzschreibweise für die Gruppe, die auf n-dimensionale Vektoren wirkt und dabei ihre Längen und Winkel zueinander erhält. Dabei ist Spiegelung ausgeschlossen.

trachtet haben, habe ich mal gesagt, eine Eins-Form gebe zu jedem Pfad eine bestimmte Zahl; aber auch mal, eine Eins-Form gebe zu jedem Vektor (also zu jeder Richtung) eine Zahl. Was wollte ich dabei unter den Teppich kehren?

Die Antwort lautet: zwar nicht allzu viel, doch etwas ganz Wichtiges. Der Unterschied ist zwischen dem *Winzigen* und dem *endlich Großen;* in der Tat ist eine Richtung nichts anderes als eine winzige, also unendlich kleine, mögliche Bewegung. Stell dir vor, ein Pfad wird mit einigen Pfeilen ausgeschrieben; da braucht man zu jedem Punkt, an dem man abbiegen könnte, einen neuen Pfeil. Eine Richtung kann man sich als Pfeil vorstellen; da man eigentlich *überall* die Möglichkeit hat, in eine neue Richtung abzubiegen, wird der endliche Pfad mit Pfeilen, die an jedem Punkt des Pfads stehen, angegeben. Genau so ein Pfeilsystem stellt ein Vektorfeld dar. Und die Gesamtänderung des Feldes wird von den kleinen Änderungen eines jeden winzigen Schrittes zusammengerechnet.

Zu Gruppen, die glatte Mengen von endlichen Symmetriebewegungen darstellen,[10] kann man auch eine neue mathematische Struktur verbinden, in dem man nur die *winzigen Symmetriebewegungen* betrachtet. Diese nennt sich die *Lie-Algebra* der Gruppe; die Beziehung zwischen der Lie-Algebra und der Lie-Gruppe ist dieselbe wie die zwischen Vektorfeldern auf einer Fläche und endlichen Bewegungen derer.

3 Eichinvarianz

Wir haben bisher sowohl Symmetrien als auch Felder betrachtet; nun wollen wir die beiden Ideen zusammenfügen, und schauen, was sich ergibt. Damit werden wir direkt zur Idee der „Eichinvarianz“ gebracht, die ganz grundlegend für die Physik des letzten Jahrhunderts ist und auch vielfältige Auswirkungen auf die Mathematik gehabt hat.

Als Erstes müssen wir festlegen, was als Symmetrie einer Feldtheorie gelten sollte. Hier gibt es verschiedene Arten; beispielsweise können wir Symmetrien der Raumzeit anschauen. Im Beispiel der Saite können wir die Saite ihre Länge entlang schieben; wenn die Ränder weit weg sind, macht das keinen Unterschied, und stellt also eine Symmetriebewegung dar. Dies entspricht der Tatsache, dass die Saite *homogen* ist; in der Regel besitzen Feldtheorien Raumzeitsymmetrien, die verdeutlichen, dass deren Dynamik homogen ist.

Es kann aber auch Symmetrien geben, die nichts mit der Raumzeit zu tun haben, und sozusagen nur die verschiedenen Felder miteinander vermischen. Ein Beispiel steht schon wieder mit der Saite parat: und zwar, stellen wir uns vor, dass sie nicht nur eine Höhe hat, sondern *zwei* Richtungen, in die sie sich bewegen kann, sowohl rauf und runter als auch mir entgegen und von mir weg. (Bei den

[10] Das heißt Gruppen, die auch glatte Mannigfaltigkeiten sind; diese nennt man *Lie-Gruppen.*

Saiten einer Geige ist das ja tatsächlich der Fall.) Dann gibt es die Möglichkeit, diese beiden Skalarfelder ineinander zu rotieren; etwa die Saite um ihre Achse zu drehen. Offensichtlicherweise werden die Wellengleichungen erhalten; damit handelt es sich um eine Symmetrie der Feldtheorie, die ihre Raumzeit überhaupt nicht anfasst. Das nennt man manchmal eine *interne Symmetrie*.

C. N. Yang und R. L. Mills [18], die Erfinder der nicht-abelschen Eichtheorie,[11] die die ganze Teilchenphysik heutzutage ungeheuer genau beschreibt, haben dann Folgendes festgestellt: Wenn eine Symmetrie beispielsweise zwei Skalarfelder ineinander rotiert, heißt das, dass es eben *keine eindeutige Wahl* eines bestimmten Feldes mehr gibt. Ich kann Ausschläge in zwei Richtungen messen, indem der erste – von mir aus gesehen – rauf und runter geht. Du kannst aber alles genauso gut beschreiben, nachdem du den Kopf gedreht hast, damit deine Felder durch einen beliebigen Winkel von meinen verdreht sind. Und – da diese Drehung eine Symmetrie ist – tut das eben gar nichts zur Sache. Wir müssen also erst mal festlegen, mit welchem Maßstab wir die Felder messen wollen, und wir haben die Freiheit, diesen Maßstab so zu *eichen*, wie wir wollen.

Aber diese Eichung darf nur *einmal* durchgeführt werden! Wenn wir an unterschiedlichen Orten stehen – seien sie noch so weit auseinander – und unterschiedliche Symmetriebewegungen durchführen, dann ist das Ergebnis *keine* Lösung der Wellengleichungen mehr, ganz egal welche ortsabhängige Symmetriebewegung wir finden, die von der meinen in die deine übergeht. Anders gesagt, haben wir keine Möglichkeit, unsere Symmetrie lokal über jedem Punkt auszuüben, beziehungsweise ortsabhängig immer anders zu eichen. Schuld sind die Ableitungen, die in der Wellengleichung vorkommen; es ergeben sich daher Terme, die Ableitungen der ortsabhängigen Symmetrie enthalten, und die dadurch entstehende zusätzliche Krümmung der Saite darstellen.

Diese Vorstellung wirkt aber dem physikalischen Prinzip der Lokalität entgegen. Warum sollte deine Eichung mir was ausmachen, wenn ich ganz weit weg bin? Wir sollten doch unabhängig voneinander physikalische Experimente durchführen und auch beschreiben können, ohne uns vorher auf einen gemeinsamen Maßstab geeinigt zu haben. Und wie können wir denn überhaupt unsere Maßstäbe denn miteinander vergleichen?

Die mathematische Struktur, die dafür notwendig ist, nennt sich *Zusammenhang*. Genauso wie die Höhenlinien Änderungen der Höhe angeben, zeigt ein Zusammenhang zu jeder möglichen Bewegung die entsprechende Änderung in unserer Eichung an – das heißt, eine mögliche Symmetriebewegung. Wir können uns so einen Apparat auf zweierlei Weise vorstellen: er kann, zu jeder winzigen Bewegung oder Richtung, eine winzige Symmetriebewegung (also ein Element

[11] Die abelsche Eichtheorie gab es schon seit der Forschung des schottischen Physikers James Clerk Maxwell (1831–1879) [8]; heute sagen wir, dass die Maxwell'sche Theorie des Elektromagnetismus eine Eichtheorie mit Eichgruppe $SO(2)$ ist.

der Lie-Algebra) angeben; beziehungsweise kann er jedem endlichen Pfad eine endliche Symmetrie (Element der Gruppe) zuweisen. Daran sieht man, dass die Zusammenhänge den *Eins-Formen mit Werten in einer Lie-Algebra* entsprechen: sie sagen mir, wie ich einen Maßstab von Ort zu Ort zu transportieren habe.

Die Grundidee der Eichtheorie ist es, erstens, die lokale (ortsabhängige) Eichsymmetrie durch Einführen eines Zusammenhangs wiederherzustellen und, zweitens, das Eichfeld (den Zusammenhang) *auch als dynamisches Feld zu betrachten.*[12] Auch dafür gibt es Wellengleichungen; das erste Beispiel, für die Gruppe $SO(2)$, wurde im 19. Jahrhundert von Maxwell [8] entwickelt, und gilt bis heute als Theorie des Elektromagnetismus. Schon Yang selbst hat begriffen, dass Eichtheorie eng mit den mathematischen Theorien der Differentialtopologie und der Vektorbündel verwandt ist [17].

Genauso wie eine Eins-Form „geschlossen" ist, wenn sich die entsprechenden Höhenangaben nicht durch eine Verschiebung des Weges ändern (solange die Endpunkte gleich bleiben), so nennt man einen Zusammenhang, dessen Symmetriebewegungen bei Verschiebungen eines Pfads erhalten bleiben, „flach". Ein flacher Zusammenhang ist eine besondere Art von Lösung der Wellengleichungen Maxwells, eine sogenannte „Vakuumlösung". Und diese Lösungen sind auch in reiner Mathematik besonders interessant; im nächsten Abschnitt weisen wir kurz darauf hin.

4 Modulräume

Nehmen wir an, wir interessieren uns jetzt für flache Zusammenhänge, beziehungsweise Vakuumslösungen einer Eichtheorie. Wie können wir so ein Objekt am besten untersuchen? Hier wird ganz oft noch ein (eventuell schwieriger) konzeptioneller Sprung gemacht: Wir stellen uns die Gesamtmenge der zu untersuchenden Objekte *selber als Raum vor;* diesen Raum nennen wir dann den *Modulraum* solcher Objekte. In der Physik denkt man viel über den Modulraum der Vakuumslösungen einer Feldtheorie nach; ein Beispiel davon ist der Modulraum flacher Zusammenhänge, der auch den Mathematikern ein beliebter Gegenstand ist.

Wie soll man sich diesen Modulraum vorstellen? Betrachten wir erstmal flache Zusammenhänge auf einem Kreis, mit Werten in einer Gruppe G. Ein Zusammenhang ordnet jedem Pfad auf dem Kreis ein Element dieser Gruppe zu; dies soll dann gleich bleiben, wenn wir einen anderen Pfad mit den gleichen Endpunkten anschauen. Jeder Pfad, der insgesamt um einen Winkel θ dreht und an einem bestimmten Punkt p anfängt, bekommt dann ein Element $g(\theta, p)$ aus der Gruppe G. Da ich den gleichen Pfad auch rückwärts gehen kann (was das

[12] Mehr zu klassischen Eichtheorien gibt es beispielsweise im Buch [11].

Element $g(-\theta, p+\theta)$ liefert), und mich in dem Fall auch hätte nicht bewegen können (also das Element $g(0,p)$), muss gelten:

$$g(-\theta, p+\theta)\, g(\theta, p) = g(0,p) = e$$

Wir haben schon flache Zusammenhänge gesehen: die geschlossenen Eins-Formen sind in der Tat solche mit Werten in der (abelschen) Gruppe von reellen Zahlen. Aber: Wenn wir diese als Zusammenhänge betrachten wollen, müssen wir die Ableitungen von Null-Formen dabei als unwesentlich betrachten; solche stellen einfach die Eichsymmetrie dar. Anders gesagt, wenn wir zwei geschlossene Eins-Formen haben, deren Differenz die Ableitung einer Null-Form ist, können wir einfach *anders eichen*; dann verschwindet auch die Differenz, und wir können festlegen, dass beide Eins-Formen – bis auf Eichsymmetrie – denselben Zusammenhang darstellen.

Wie auch schon gesehen, besteht das Hemmnis dafür, dass eine geschlossene Eins-Form keine Ableitung ist, in den nicht-trivialen Werten, die sie *geschlossenen Pfaden* zuweist. Auf dem Kreis kann man es ganz einfach sehen: der einzige Pfad, der in Frage kommt, geht einmal herum, und bekommt auch ein Element der Gruppe zugewiesen.

Wie wirkt die Eichsymmetrie auf dieses Element? Das können wir uns so denken: wir sind von einem Punkt p ausgegangen, gehen einmal herum und wieder zu p zurück, und drehen uns dabei um $g(2\pi, p)$. Aber wir hätten auch von $p+\theta$ ausgehen können; dann hätten wir $g(2\pi, p+\theta)$ bekommen. Was die beiden miteinander zu tun haben, können wir mit folgender Formel ausdrücken:

$$g(2\pi, p) = g(-\theta, p+\theta)\, g(2\pi, p+\theta)\, g(\theta, p).$$

Diese Formel heißt: wir können erst von p zu $p+\theta$ gehen, dann einmal ganz herum, dann wieder zu p zurück. Und das kommt auf das Gleiche raus, als von p aus einmal um den Kreis herumzugehen.

Aber wir sahen doch oben, dass $g(-\theta, p+\theta)\, g(\theta, p) = e$ gelten muss: vorwärts und wieder rückwärts ist das Gleiche wie nichts tun. Und das Element $g(\theta, p)$ ist nicht ein für alle Mal festgelegt; in der Tat können wir durch eine ausgewählte Eichsymmetrie dieses durch *jedes beliebige Element der Gruppe* ersetzen.

Damit haben wir aber eine vollständige Beschreibung des Modulraums geschafft! Ein flacher Zusammenhang ist also eine Menge von äquivalenten Gruppenelementen. Zwei Gruppenelemente g und g' sind äquivalent, wenn sie durch eine Eichsymmetrie ineinander übergehen – das heißt, wenn es ein Element h von G gibt, so dass $g'h = hg$ gilt. Der Modulraum entspricht „der Zerlegung der Gruppe in ihre Konjugationsklassen".

Im Oberwolfach-Workshop, an dem ich teilgenommen habe, ging es um genau solche Modulräume. Da gibt es nur einen kleinen Unterschied: man betrachtet den Modulraum flacher Zusammenhänge auf einer zweidimensionalen

Fläche, mit Werten in einer Gruppe von Matrizen von komplexen Zahlen. Dieser hat dann eine überraschende Eigenschaft: er ist nicht nur der Modulraum flacher Zusammenhänge, sondern *auch* – auf subtile Weise – der Modulraum der sogenannten „Higgs-Bündel“ [3, 14]. Diese Strukturen werden seit der Arbeit von N. Hitchin [7] intensiv erforscht, und spielen auch in der Physik eine besondere Rolle als Modulräume der Vakuumslösungen bestimmter Feldtheorien. Für einen weiteren Einblick empfehle ich beispielsweise den Artikel [2].

5 Erweiterung

Wir haben vorher gesagt, dass ortsabhängige Symmetrien unbedingt zu Eichfeldern führen müssen. Da haben wir aber auch eine kleine Ausnahme unter den Teppich gekehrt, die eine Besonderheit von unserem ersten Beispiel – die Wellengleichung für Skalarfelder in zwei Dimensionen – auszeichnet. Dort haben wir gesehen, dass man die Wellengleichung entzweien und durch folgende zwei Gleichungen ersetzen kann:

$$\left(\frac{d}{dt} - c\frac{d}{dx}\right) h(t,x) = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} + c\frac{d}{dx}\right) h(t,x) = 0.$$

(Hier stellt h die beiden querverlaufenden Ausschläge dar, damit wir eine interne $SO(2)$-Symmetrie haben.) Wie schon gesagt sorgen die Ableitungen dafür, dass es erstmal keine lokale Symmetrie gibt. Hier werden aber die Ableitungen unterteilt: In jeder Gleichung sorgt eine Ableitung dafür, dass sich die Lösung nach links, beziehungsweise rechts, bewegt; die andere spielt gar keine Rolle.

Das heißt, dass es in diesem Fall doch eine lokale Symmetrie gibt, die *keine* Eichsymmetrie ist: eine linksgehende Lösung besitzt die Wirkung einer beliebigen ort- und zeitabhängigen Symmetrie, die nur der Bedingung unterliegt, *dass sie auch linksgehend ist.* Wir haben also viel mehr Symmetrie als gedacht: nicht nur die aus $SO(2)$ selbst, sondern alle linksbewegenden Funktionen mit Werten in $SO(2)$. Solche Algebren spielen eine große Rolle in der zweidimensionalen Physik, wo sie *Kac–Moody Algebren* genannt werden; siehe beispielsweise [1, 5]. Diese erweiterte Symmetrie kann man auch sehen: Da eine Lösung einfach aus irgendeiner beliebigen, linksgehenden Verschiebung der Saite besteht, ersetzt diese eine linksgehende Symmetrie durch eine andersförmige Verschiebung, die ebenso die Wellengleichungen löst.

In letzter Zeit hat sich herausgestellt, dass solche unendlich erweiterten Symmetrien auch in höheren Dimensionen eine Rolle spielen. Dies ist etwas unerwartet, da sich ja die Wellengleichung nicht mehr zerlegen lässt; trotzdem kommen aber „holomorphe“ Funktionen (das Analogon der linksgehenden Funktionen) im Rahmen von „supersymmetrischer“ Feldtheorie ins Spiel. Diese müssen dann auch durch bestimmte Differentialformen, den „Dolbeault-Komplex“, ersetzt werden; die dadurch entstehenden Algebren traten in [4, 6] auf, und wurden in Bezug auf Feldtheorien in [12, 13] weiter entwickelt. Zu dem Thema können wir hier leider nicht mehr viel sagen; hoffentlich siehst du aber, dass dir die Objekte und grundlegenden Gedankengänge, auch der aktuellen mathematischen Forschung, nun schon bekannt sind, und doch alle ganz bescheiden vorkommen, sogar im Saarbrücker Alltag.

Nachwort und Danksagung

Sich Ideen als Eigentum vorzustellen, ist ein ziemlich großer Denkfehler. Wenn ich sage, „ich habe eine Idee“, drückt das doch keine Eigentumsbeziehung aus. Eher ähnelt es der Redewendung „ich habe eine Erkältung“. Die wurde mir übertragen, und zwar von anderen Menschen; eventuell ändert sie sich ein wenig während ihres Aufenthaltes; dann wird sie bald weiter übertragen, denn ihr Wesen ist zwischenmenschlich. Eine Idee, die ich zu *besitzen* glaube und nicht weitergebe, ist tot; sie ist so gut wie keine Idee, und dabei habe ich mich selbst angelogen, denn sie gehörte sowieso nicht mir.

Deswegen möchte ich erstens allerlei Eigentumswahnvorstellungen, die sich auf diesen Beitrag beziehen, zurückweisen; zudem, und viel wichtiger, möchte ich mich ganz herzlich bei all denen bedanken, die mich durch die Jahre angesteckt haben. Für sorgfältige Überprüfung des Textes und Kommentare unschätzbaren Werts gebührt M. Bleher, K. Nilles, J. Walcher, und M. Zikidis ganz besonderer Dank, sowie auch der Arbeitsgruppe in mathematischer Physik an der Universität Heidelberg und dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, für seine ausgezeichnete Gastfreundschaft und den besonders gemütlichen und ansteckenden Aufenthalt. Nicht zuletzt muss ich mich noch herzlichst bedanken, bei Laura Patricia Schaposnik Massolo, für die Einladung zum Oberwolfach-Workshop und die Anregung zum Zusammenbasteln von diesem Text, und bei Petra Lein, für die tüchtige Hilfe vonseiten des Instituts.

Literatur

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov und A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nuclear Physics. B **241** (1984), Nr. 2, 333–380.

[2] S. B. Bradlow, O. García-Prada und P. B. Gothen, *What is... a Higgs bundle?*, Notices of the American Mathematical Society **54** (2007), Nr. 8, 980–981.

[3] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, Journal of Differential Geometry **28** (1988), Nr. 3, 361–382.

[4] G. Faonte, B. Hennion und M. Kapranov, *Higher Kac–Moody algebras and moduli spaces of G-bundles*, Advances in Mathematics **346** (2019), 389–466.

[5] P. Di Francesco, P. Mathieu und D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer, 2012.

[6] O. Gwilliam und B. R. Williams, *Higher Kac-Moody algebras and symmetries of holomorphic field theories*, Advances in Theoretical and Mathematical Physics **25** (2021), Nr. 1, 129–239.

[7] N. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Mathematical Journal **54** (1987), Nr. 1, 91–114.

[8] J. C. Maxwell, *VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London (1865), Nr. 155, 459–512.

[9] W. Pauli, *Relativistic field theories of elementary particles*, Reviews of Modern Physics **13** (1941), Nr. 3, 203–232.

[10] ______, *Phänomen und physikalische Realität*, Dialectica **11** (1957), Nr. 1-2, 36–48.

[11] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, 2009.

[12] I. Saberi und B. R. Williams, *Twisted characters and holomorphic symmetries*, Letters in Mathematical Physics **110** (2020), Nr. 10, 2779–2853.

[13] ______, *Superconformal Algebras and Holomorphic Field Theories*, Annales Henri Poincaré (2022).

[14] C. T. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **75** (1992), 5–95.

[15] W. Specht, *Gruppentheorie*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 82, Springer-Verlag, 1956.

[16] E. P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Communications on Pure and Applied Mathematics **13** (1960), 1–14.

[17] C. N. Yang, *Magnetic monopoles, fiber bundles, and gauge fields*, Annals of the New York Academy of Sciences **294** (1977), Nr. 1, 86–97.

[18] C. N. Yang und R. L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Physical Review, II. Series **96** (1954), 191–195.

Ingmar Saberi *ist wissenschaftlicher Mitarbeiter in mathematischer Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München.*

Mathematische Gebiete
Geometrie und Topologie

Verbindungen zu anderen Gebieten
Physik

DOI
10.14760/SNAP-2023-003-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach bieten spannende Einblicke in die aktuelle mathematische Forschung. Sie werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Die Schnappschüsse haben zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der interessierten Öffentlichkeit weltweit zu fördern. Alle Schnappschüsse werden in Kooperation mit der IMAGINARY Onlineplattform veröffentlicht und können unter www.imaginary.org/snapshots sowie www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

ISSN 2626-1995

Editorin
Anja Randecker
junior-editors@mfo.de

Chefeditorin
Anja Randecker
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9 – 11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor
Gerhard Huisken

Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

Mitglied der Leibniz
Leibniz
Gemeinschaft

IMAGINARY
open mathematics