REALSOCIEDAD MATEMÁTICAESPAÑOLA
CENTENARIO1911//2011

Real Sociedad Matemática Española

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

FECYT
FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

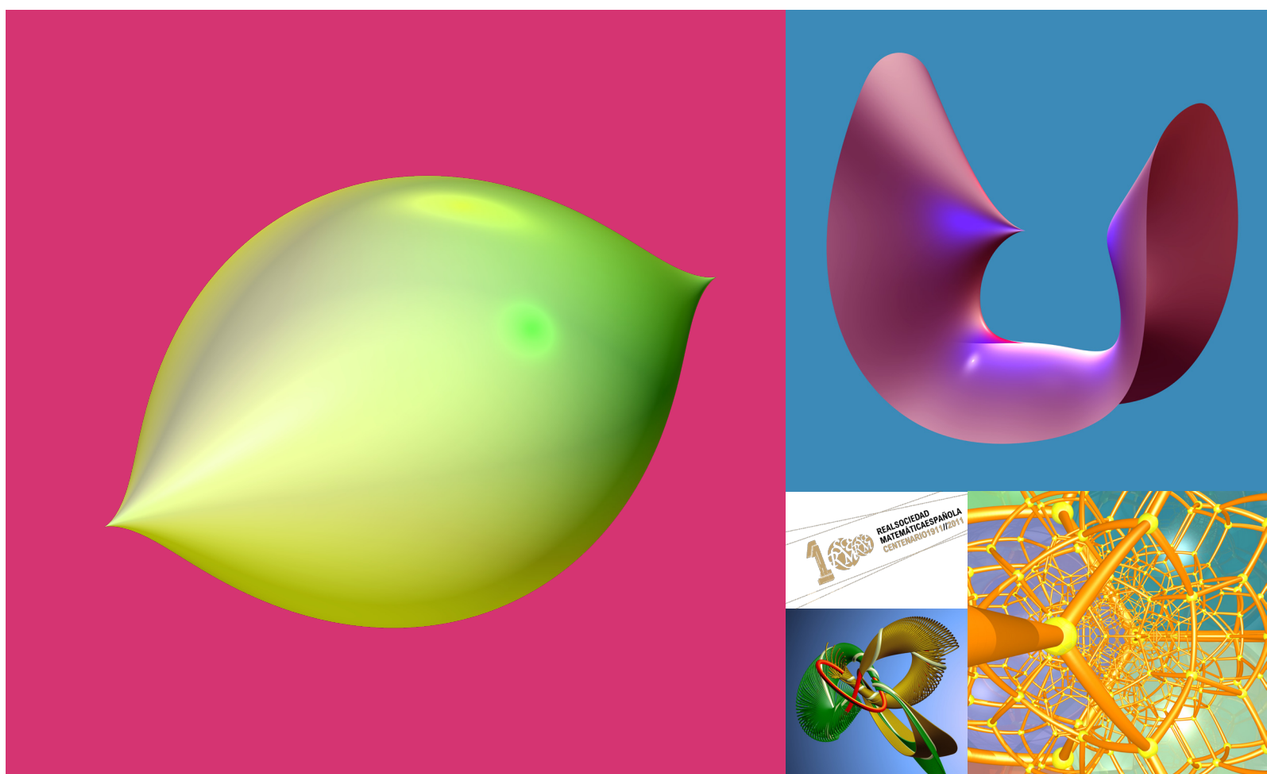
GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

UPC

IMAGINARY
una mirada matemática

RSME-IMAGINARY

Real Sociedad Matemática Española



Real Sociedad Matemática Española

RSME – IMAGINARY

Una mirada matemática

Una exposición de la
REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
en colaboración con el
MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH (MFO)

© 2011

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
CIF G28833523
Despacho 525, Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid
Plaza de las Ciencias, 3. 28.040 - Madrid

Impresor:

GRÁFICAS PAPIRO
c. Pizarro, nº 5 bajo. 33213 - Gijón
Tel. 985 323 623

Encuadernador:
ENCUADERNACIONES TUYA
Polígono de Roces, 5. Calle 2, Nave 14. 33213 - Gijón

ISBN: 978-84-7653-654-4
Depósito Legal: AS-03231-2010

Reservados todos los derechos. Queda totalmente prohibida la reproducción total o parcial de este libro por cualquier procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo la fotocopia, registro magnético o cualquier sistema, sin el permiso explícito de la REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA y del INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA DE OBERWOLFACH, y, en su caso, de los autores de las imágenes.



IMAGINARY

una mirada matemática

Real Sociedad
Matemática Española

www.rsme-imaginary.es

Presentación



La Real Sociedad Matemática Española (RSME) celebra el centenario de su fundación durante el año 2011.

Entre los objetivos de esta celebración se encuentra la divulgación de las Matemáticas para estudiantes y para el público en general. La exposición RSME-IMAGINARY es una adaptación de la exposición IMAGINARY creada con ocasión del Año Alemán de las Matemáticas (2008) por el Instituto de Matemáticas de Oberwolfach (MFO), se inscribe en esta visión y está enfocada a subrayar, usando tecnologías de informática y comunicaciones, la estrecha relación entre Matemáticas y Arte.

RSME-IMAGINARY consiste en un despliegue de exposiciones fijas interactivas y de exposiciones itinerantes en las cuales el Arte se percibe como formas, generalmente de superficies, y las Matemáticas como el medio para representarlas en formatos aptos para ser tratados tanto en consideraciones teóricas como en el tratamiento informático necesario para las aplicaciones. Entre los métodos de representación de las superficies usados en esta exposición destaca el de las ecuaciones cartesianas.

Las formas pueden presentarse como esculturas, elaboradas con la técnica de impresiones 3D, como cuadros, o como figuras en una pantalla táctil. Por contraste con las esculturas y cuadros, cuya función es ser contemplados, la pantalla táctil está pensada para que los visitantes de todas las edades puedan interactuar fácilmente con los objetos.

Si bien RSME-IMAGINARY se ha diseñado de tal modo que sea inspiradora para todos los públicos, el mayor provecho lo pueden obtener los alumnos de educación secundaria obligatoria y de bachillerato. Para reforzar este efecto, y especialmente en las visitas de cursos acompañados por sus profesores, hemos diseñado un sistema de visitas guiadas a fin de facilitar aún más la interacción, explicar la exposición y contestar a las preguntas que puedan surgir. Después del primer semestre de exposiciones, y coincidiendo con la confluencia de la exposición y las JAEM en Gijón, este objetivo se ve ampliado y potenciado.

Finalmente, quisiera destacar que la exposición RSME-IMAGINARY también pretende contribuir a desarrollar la visión de sus creadores como un concepto "vivo" de exposición. Por este motivo, se contemplan acciones de difusión entre profesores universitarios e investigadores, que invitan a presentar aportaciones de "formas" atractivas que hayan podido surgir en el proceso de innovaciones científicas, o que invitan a contrastar aspectos artísticos o de otra índole que sean suscitados por los objetos expuestos. De todas ellas vamos dando debida cuenta en la página web de RSME-IMAGINARY y en la del centenario de la RSME.

Con la firme convicción de que las Matemáticas nos dan capacidad creativa y nos permiten mejorar nuestra cultura, te animo a visitar de la exposición RSME-IMAGINARY y participar con nosotros en las actividades de celebración del centenario de la RSME.

Antonio Campillo
Universidad de Valladolid
Presidente de la Real Sociedad Matemática Española

AGRADECIMIENTOS

La exposición RSME-IMAGINARY es el resultado de un esfuerzo colectivo considerable, difícil de cuantificar. En esta página consignamos las aportaciones de las cuales tenemos constancia, pero somos conscientes de que tiene que haber bastantes más granos de arena que nombres desconocidos para nosotros han añadido al gran montón. Nuestro agradecimiento más sincero, a los nombres conocidos y a los todavía desconocidos, ya que sin la suma de todos sus esfuerzos la extraordinaria aventura de RSME-IMAGINARY no habría sido posible.

Institucionales

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO), por haber promovido la exposición IMAGINARY con motivo del Año Alemán de las Matemáticas (2008) y por haber cedido a la RSME los derechos para usarla, incluyendo la infraestructura Web, como base de una de las iniciativas promovidas para la celebración del Centenario.

Gert-Martin Greuel, director del MFO y del proyecto IMAGINARY;
Andreas Matt, coordinador general del despliegue de IMAGINARY, y que ha dispensado una incesante e inmensa ayuda al proyecto de la RSME; y
Anna Hartkopf, coordinadora adjunta.

Imágenes

Herwig Hauser, Sebastian Gann, Christian Stussak, Oliver Labs, Luc Benard, Richard Palais, Tim Hoffmann, Ulrich Pinkall, Charles Gunn, Aurélien Alvarez, Étienne Ghys, Jos Leys (por orden de aparición). DFG Research Center MATHEON. María T. Lozano (ilustración incluida en el texto número 38).

Textos

Inspirados en parte en textos de la exposición alemana, los textos de los paneles que acompañan a las imágenes han sido elaborados por Maria Alberich, Jordi Buendía, Anna Sabater y Emilio Sánchez (1-31; con una colaboración inicial de Capi Corrales); Raúl Ibáñez y Pedro Alegría (32-37, 43, 44 y textos introductorio de Geometría Diferencial, con ilustraciones de Josu Arroyo); María T. Lozano (panel 38) y Sebastian Xambó (paneles 39-42). Los textos dedicados a SURFER, ¡-Reality y Morenaments son adaptaciones de los correspondientes rollups, mientras que los de Cinderella_Imaginary lo son de los textos explicativos del programa.

Catálogo

Este opúsculo es una adaptación del catálogo "IMAGINARY – Mit den Augen der Mathematik, through the eyes of mathematics / Katalog zur Wanderausstellung, Travelling Exhibition Catalogue", editado por Gert-Martin Greuel y Andreas Daniel Matt, ISBN 978-3-00-026939-4.

SURFER
(basado en Surf, de Stephan Endraß y otros: surf.sourceforge.net)

Gert-Martin Greuel: Dirección.
Henning Meyer: Programación Linux y Surf.
Christian Stussak: conversión a Windows, versión Java, programación Surf.
Oliver Labs: Concepto y Galerías.
Herwig Haurser: Galerías.
Andreas Matt: Concepto y coordinación.
Rollup: Traducción y composición de Sebastian Xambó,
con la colaboración de Ignacio Ojeda y Félix Delgado.

Esculturas

Institut Forwiss/Universität Passau, Alphaform, Voxeljet.
Rollup: Traducción y composición de Sebastian Xambó.

j-Reality

Ulrich Pinkall y Steffen Weissmann: Concepto y diseño.
www.jreality.de: Creación.
Rollup: Traducción y adaptación de Raúl Ibáñez y Sebastian Xambó.

Morenaments

Martin von Gagern: Autor.
Narcís Sayols y Jordi Tura: Adaptación a Imaginary/CosmoCaixa-Barcelona.
Rollup: Textos de María T. Lozano, composición de Sebastian Xambó.

Imaginary-Cinderella

Jürgen Richter-Gebert, Ulrich Kortenkamp.

3D-XplorMath

Richard Palais, Hermann Karcher.

Material gráfico

Sebastian Xambó: composición de pósters y anuncios en papel, así como de lonas externas, siguiendo directrices de la Comisión RSME-IMAGINARY y con la ayuda de las comisiones locales; composición y edición de este catálogo, con la colaboración de Ignacio Ojeda.

Comisión RSME-IMAGINARY

Antonio Campillo (Presidente)
Sebastian Xambó (Coordinador general)
Ignacio Ojeda (Secretario)
Maria Alberich
Mercedes Siles
Raúl Ibáñez
Mª Teresa Lozano Imízcoz
Juan J. Nuño
Ramón Piedra.

Coordinadores de las comisiones locales

Pablo M. Chacón (Salamanca)
Félix Delgado (Valladolid)
Manuel González Hidalgo (Palma de Mallorca)
Raúl Ibáñez (Bilbao)
Esteban Induráin (Pamplona)
Santos González (Gijón)
María T. Lozano Imízcoz (Zaragoza)
Raquel Mallavibarrena (Madrid)
Ramón Piedra (Sevilla)
Juan J. Nuño (Valencia)
Mercedes Siles (Málaga)
Maria Alberich (Barcelona)
Antonio Martinón (La Laguna)

Recursos de carácter general

Real Sociedad Matemática Española

Instituto de Investigación Matemática de Oberwolfach

Ministerio de Ciencia e Innovación, Ministerio de Educación

Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología

Universidad Politécnica de Cataluña

i-Math Ingenio Mathematica

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPEM)

Addlink

Acer

Recursos de carácter local

Gobierno de Castilla y León, Universidad de Salamanca, Universidad de Valladolid, Sociedad Miguel de Guzmán;

Gobierno de las Islas Baleares, Universidad de las Islas Baleares, Sociedad Balear de Matemáticas (*Xeix*);

Gobierno Vasco, Universidad del Pais Vasco, Telefónica;

Universidad Pública de Navarra;

Gobierno de Asturias, Jornadas Sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), Cátedra de Inteligencia Analítica Avanzada, La Laboral Centro de Arte y Diseño Industrial, Ayuntamiento de Gijón;

Gobierno de Madrid, Real Academia de Ciencias, Universidad Complutense de Madrid, Universidad Autónoma de Madrid, Universidad Carlos III, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Universidad Rey Juan Carlos, Universidad de Alcalá;

Gobierno de Aragón, Universidad de Zaragoza, Centro Joaquín Roncal (Fundación CAI-ASC);

Gobierno de Andalucía, Universidad de Sevilla, Universidad de Málaga, Café París (Málaga);

Generalitat Valenciana, Universidad de Valencia;

Generalitat de Catalunya, Sociedad Catalana de Matemáticas, Universidad de Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña, Ayuntamiento de Barcelona;

Gobierno de las Islas Canarias, Universidad de La Laguna.

www.rsme-imaginary.es

Es la página Web principal de RSME-IMAGINARY. Da acceso a las Webs IMAGINARY hermanas en alemán e inglés. Contiene enlaces a muchas otras Webs relacionadas y a materiales sobre diversos temas. Incluye las galerías que se van elaborando con las visitas a las distintas sedes.

www.rsme.es

La página Web de la RSME. Contiene información actualizada sobre todas las actividades de la RSME. En particular, se hace eco puntualmente sobre de la evolución de RSME-IMAGINARY.

http://www.rsme.es/centenario/

Página Web del Centenario de la RSME. "La RSME llega a su centenario en 2011 siendo una sociedad moderna y activa que trabaja para servir de apoyo a los matemáticos españoles en su empeño por mejorar la investigación, la enseñanza a todos los niveles, la amplitud de las aplicaciones, la estima del público y el reconocimiento por parte de las instituciones".

Programas

Los programas interactivos de visualización matemática que forman parte de RSME-IMAGINARY facilitan la exploración autónoma o guiada de un rico universo de bellas formas y pueden ser usados en los centros de enseñanza o por los particulares. Se pueden descargar gratuitamente desde la primer Web.

Concurso SURFER

En www.rsme-imaginary.es (> Galerías > Concurso SURFER RSME) se puede encontrar también el estado corriente del concurso de imágenes producidas con la ayuda de SURFER.


IMAGINARY
una mirada matemática

SUPERFICIES ALGEBRAICAS

La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.

Galileo Galilei, Il Saggiatore, cap. 6, p.4.

Donde el mundo cesa de ser la escena de nuestras esperanzas y deseos personales, donde nos enfrentamos a él como seres libres admirando, preguntando y observando, ahí entramos en el terreno del Arte y de la Ciencia.

Albert Einstein

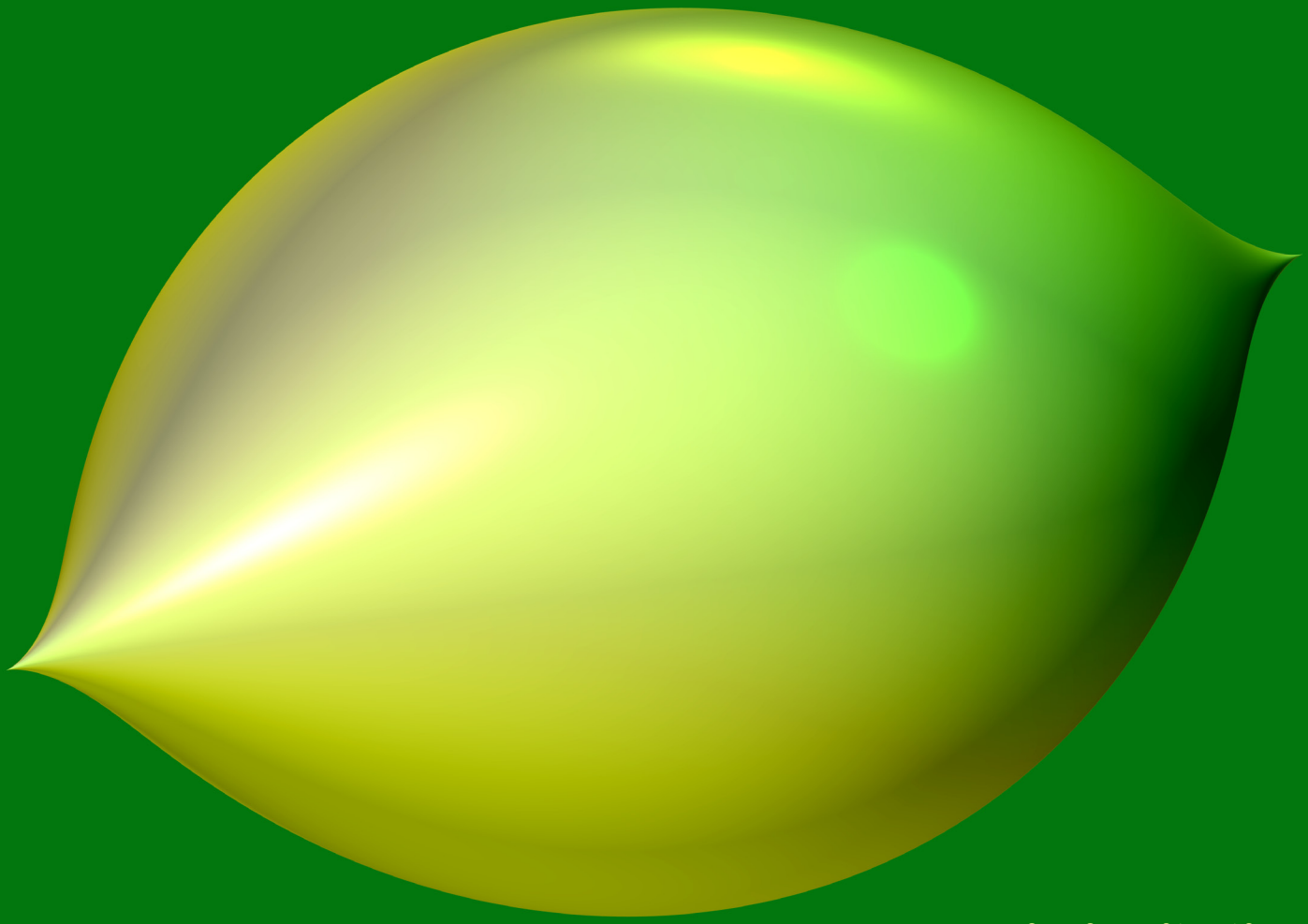
UNAS PALABRAS AL VISITANTE / LECTOR

Muy a menudo oímos tópicos sobre lo complicadas que son las Matemáticas, pero lo cierto es que nos ayudan a comprender la complejidad del mundo que nos rodea de la manera más simple posible.

Por ejemplo, nos pueden ayudar a clasificar los objetos. La primera manera en que se clasificaron los objetos del mundo fue por su forma y su tamaño. Esta primera clasificación depende fuertemente del observador: de sus habilidades para describir una forma, de dónde se coloque y también de con qué compare el objeto.

La herramienta fundamental que hizo posible llegar a clasificaciones de las formas, de validez universal, la introdujeron los matemáticos Fermat y Descartes en el siglo XVII, y consiste en elegir un convenio para orientarse en el espacio, esto es, un sistema de coordenadas que permite describir las relaciones geométricas, ya estudiadas por los griegos (Euclides s. III a.C.), en el lenguaje del álgebra desarrollado por los árabes (Al-Khwarizmi s. IX).

Considérate invitado a mirar la exposición "con ojo matemático" desde la perspectiva que más te seduzca: dejándote cautivar por las formas de las figuras, atento a las sugerencias que despiertan en tu imaginación; participando en el diálogo entre geometría y álgebra, aprendiendo a leer propiedades de una forma, como las simetrías, en su ecuación; o desafiando el mundo de las singularidades, puntos especiales donde las figuras son rudas y cortantes como el filo de una navaja o la punta de una aguja, descubriendo algunos de los misterios de los conceptos que involucran.



Zitrus $x^2+z^2 = y^3(1-y)^3$

1. Zitrus (*Limón*)

$$x^2 + z^2 = y^3 (1 - y)^3$$

Esto no es un limón

La traición de las imágenes

Al ver esta imagen, seguramente todos hemos pensado: "Esto es un limón". Pero si es un limón, ¿Por qué no tiene olor ni sabor? ¿Por qué no tiene ni poros ni manchas? ¡Está claro que esto no puede ser un limón!

En efecto, esta figura no es un limón, sino un modelo matemático de un limón, que nos ayuda a entender mejor las propiedades de la forma que tiene el limón. Las ecuaciones nos permiten construir modelos matemáticos que se parecen a las cosas, y estudiar estos modelos matemáticos nos ayuda, a su vez, a entender mejor la forma de las cosas.

El mapa no es el territorio
Alfred H. S. Korzybski

Todo esto forma parte de la "poesía" de las Matemáticas. A partir de ecuaciones algebraicas podemos generar bellas superficies que transportan nuestros pensamientos hasta rincones insospechados de nuestra mente.


Zeck
$x^2+y^2=z^2(1-z)$

2. Zeck (*Peonza*)

$x^2 + y^2 = z^3 (1 - z)$

La ecuación, un nombre inequívoco

Imagina un nombre para esta figura…

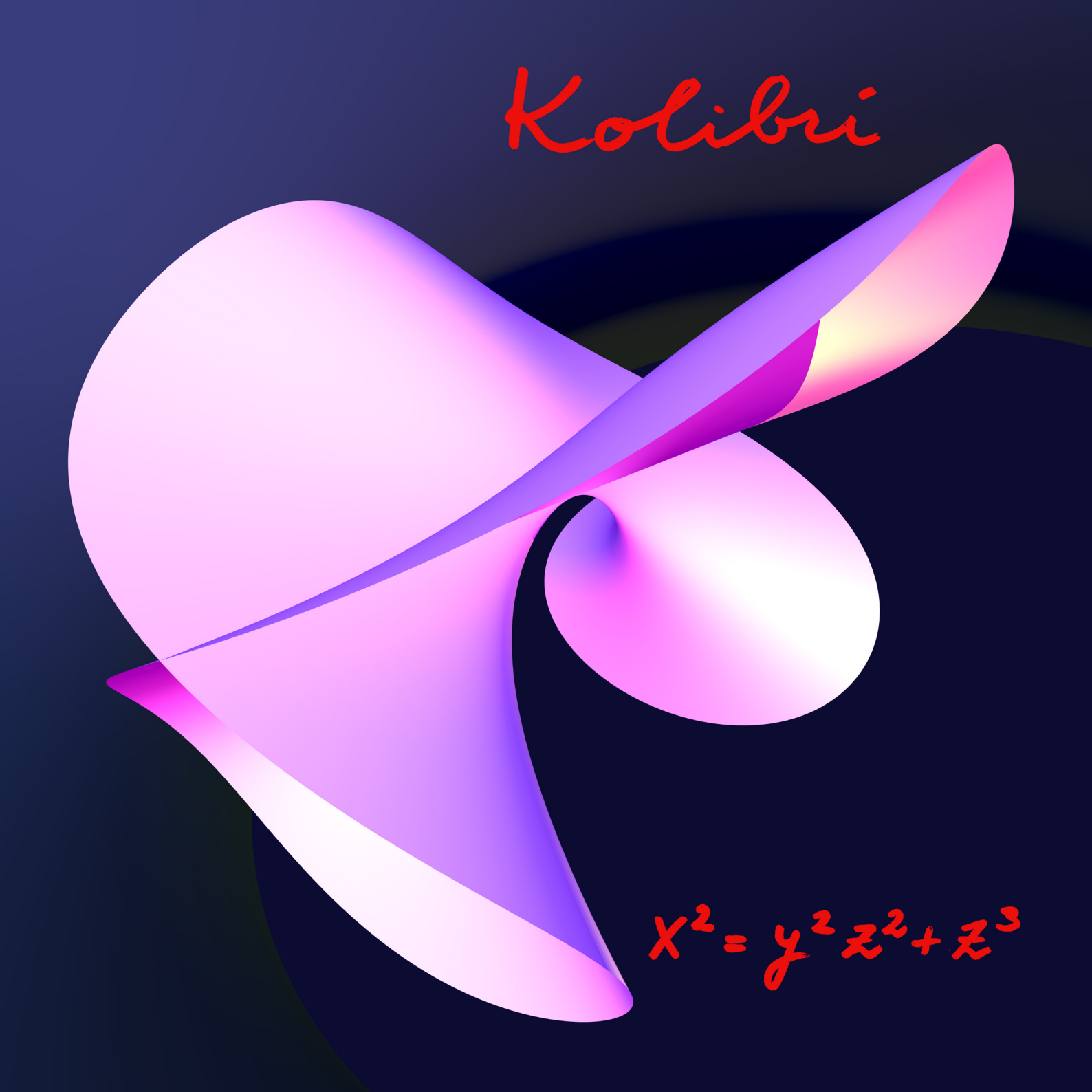
Todas las figuras que se muestran en la exposición tienen nombre. Si tuvieras que nombrarlas tú, ¿qué nombres hubieras escogido?

¿Qué nombre crees que habrá puesto otra persona? ¡Pregúntalo!

Pero, ¿podemos encontrar un modo de nombrar figuras que nunca lleve a confusión? En Matemáticas se ha resuelto nombrándolas por su ecuación.

Una sola ecuación determina toda la figura, todos sus puntos, todas sus curvas, incluso todos sus agujeros, todos sus pliegues y todas sus puntas. Sólo falta aprender a encontrarlos en la ecuación o saber dibujarla. Es como cuando te enseñan a escribir: una vez sabes escribir sin faltas una palabra, todo el mundo la entiende.

Además, las ecuaciones se escriben y se interpretan igual en todas partes, porque el lenguaje de las Matemáticas es universal, como las partituras musicales.


Kolibri
$X^2 = y^2z^2 + z^3$

3. Kolibri (*Colibrí*)

$$z^3 + y^2 z^2 = x^2$$

Diálogo entre Geometría y Álgebra

La ecuación es el jefe de los puntos

Esto es lo que nos dice el Álgebra sobre Colibrí: está formada por todas las ternas (x, y, z) de números que cumplen $x^2 = y^2z^2+z^3$. Por ejemplo,

$$(0,0,0),\ (1,0,1) \text{ y } (3,-2,-3)$$

son puntos de Colibrí, mientras que (0,1,1) no lo es.

En general, la ecuación describe exactamente la figura: a cada punto le corresponde una terna de números (x, y, z) que es solución de la ecuación y viceversa.

Pero, ¡Colibrí es una figura geométrica que vemos en el espacio! ¿Cómo sale la figura de Colibrí a partir de estos números?

Esto nos lo dice la Geometría: para interpretar x, y, z necesitas elegir un convenio para orientarte en el espacio, esto es, un sistema de coordenadas. Éste consta de tres ejes que pasan por un punto, llamado origen, y que determinan las tres direcciones atrás-delante, derecha-izquierda y abajo-arriba. Así, las coordenadas (x, y, z) indican cuánto se ha recorrido en cada una de las tres direcciones desde el origen hasta llegar al punto en cuestión.


Tülle
$yz(x^2+y-z)=0$

4. Tülle (*Embrollo*)

$$y\,z\,(x^2 + y - z) = 0$$

Infinitos puntos en una palabra

Los "Pulgarcitos" de las Matemáticas

Del mismo modo que los impresionistas pintaban casas y prados con miles de puntos de pintura, las superficies también están formadas por miles de puntos. De hecho, una infinidad, ¡todos soluciones de una ecuación!

Una manera de pensar en el infinito es empezar a contar

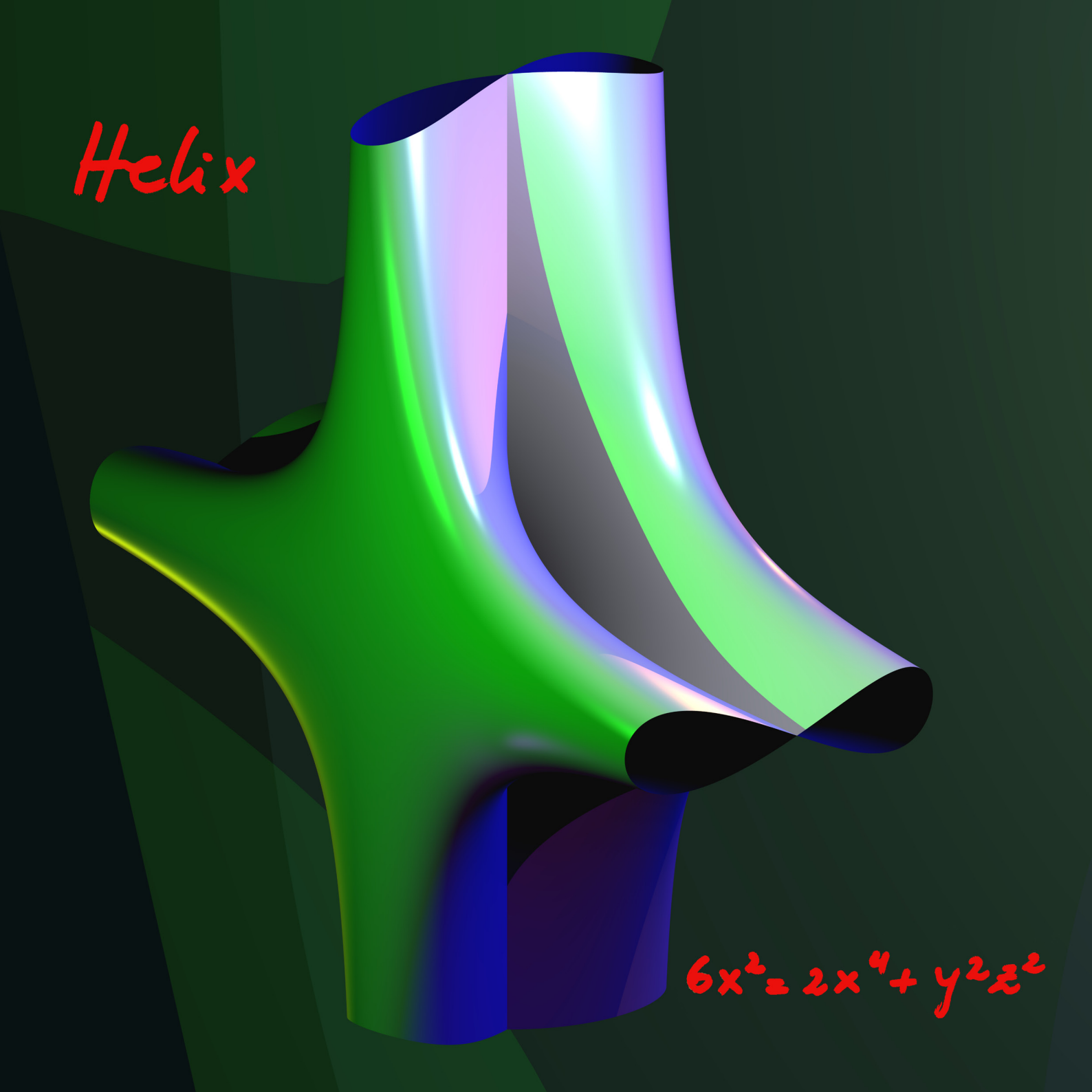
1, 2, 3, …

Siempre hay un número mayor, y no acabamos nunca de nombrar todos los números naturales.

Fíjate en la ecuación de Embrollo: los factores yz multiplican toda la ecuación. Por tanto todos los puntos de los planos z=0 (horizontal) e y=0 (vertical) forman parte de Tülle.

Pero no solamente figuras como Tülle, que contiene dos planos, están formadas por una infinidad de puntos. Un cuadrado, sin ir más lejos, también.

Parece imposible que infinitos puntos quepan en un cuadrado, que es una porción finita, ¿verdad? Piensa que los puntos son tan pequeños que se les considera sin dimensiones, y si pudiéramos dibujar realmente uno, no sería perceptible al ojo humano.


Helix
$6x^2 = 2x^4 + y^2z^2$

5. Helix (*Hélice*)

$$6x^2 = 2x^4 + y^2 z^2$$

Más finas que una pompa de jabón

No se pueden esculpir de lo finas que son

Las pompas de jabón son extremadamente delicadas, tanto que a veces parece que estallen por el simple hecho de mirarlas.

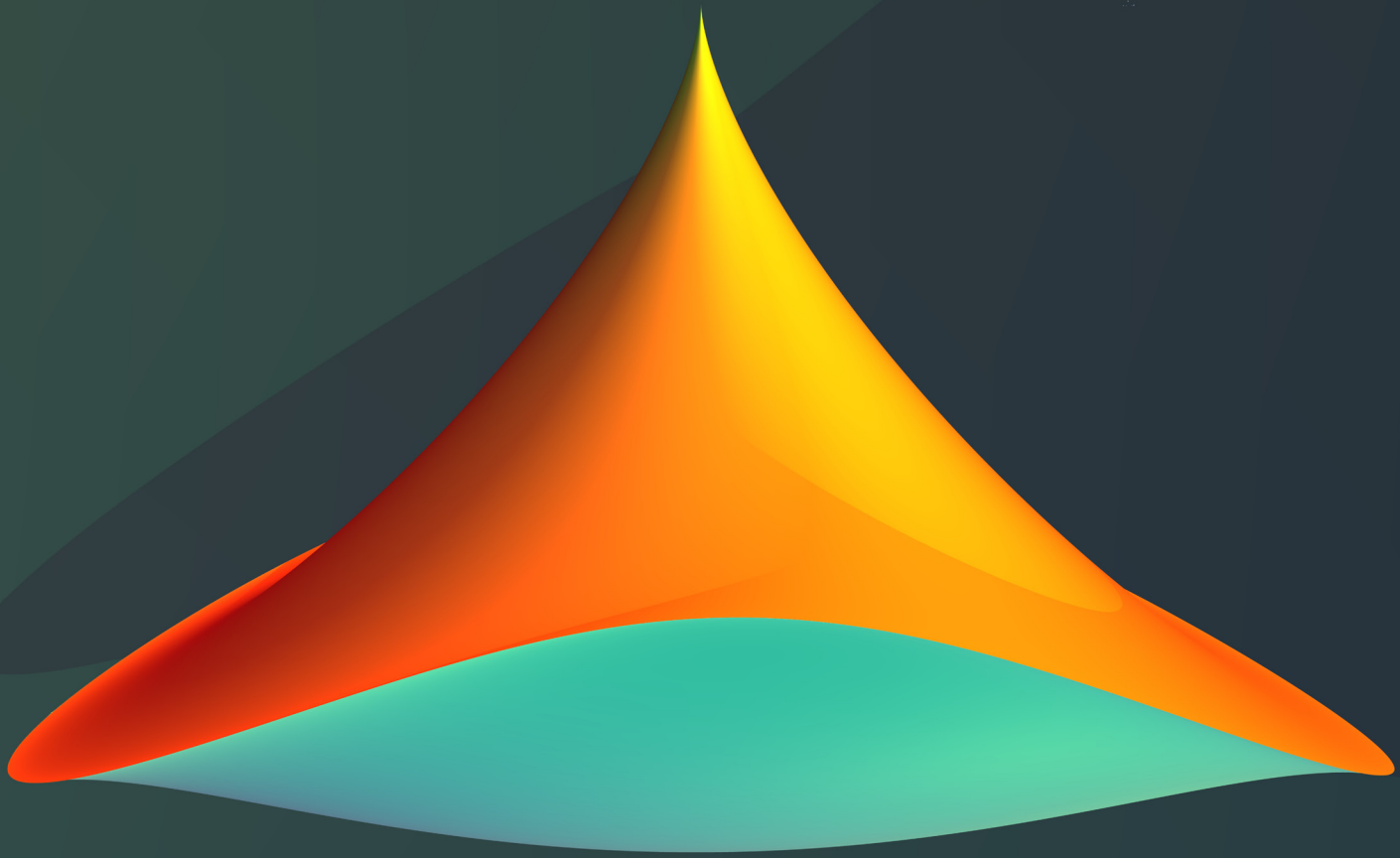
Sin embargo, su superficie está formada por una capa de agua atrapada entre dos capas de jabón. Cuando son demasiado finas, por ejemplo cuando la pompa de jabón crece, el agua de la capa interior hace estallar la burbuja.

Las superficies algebraicas son muchísimo más finas que las pompas de jabón, ya que están hechas de una sola capa de puntos. Y como sólo usamos nuestra imaginación para producir los puntos, sin grosor ni masa, las superficies no estallan, aunque tengan puntas o pliegues tan marcados como los de Hélice.

Así, si queremos tocar la superficie de Hélice en un modelo tridimensional, tenemos que crear una escultura más gruesa de lo que es Hélice en realidad, engrosando la superficie por uno de los lados. La escultura de Hélice que se muestra en la vitrina se ha engrosado por su lado interior.

Nepali

$$(xy - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$$



6. Nepali (*Nepalí*)

$$(x\,y - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$$

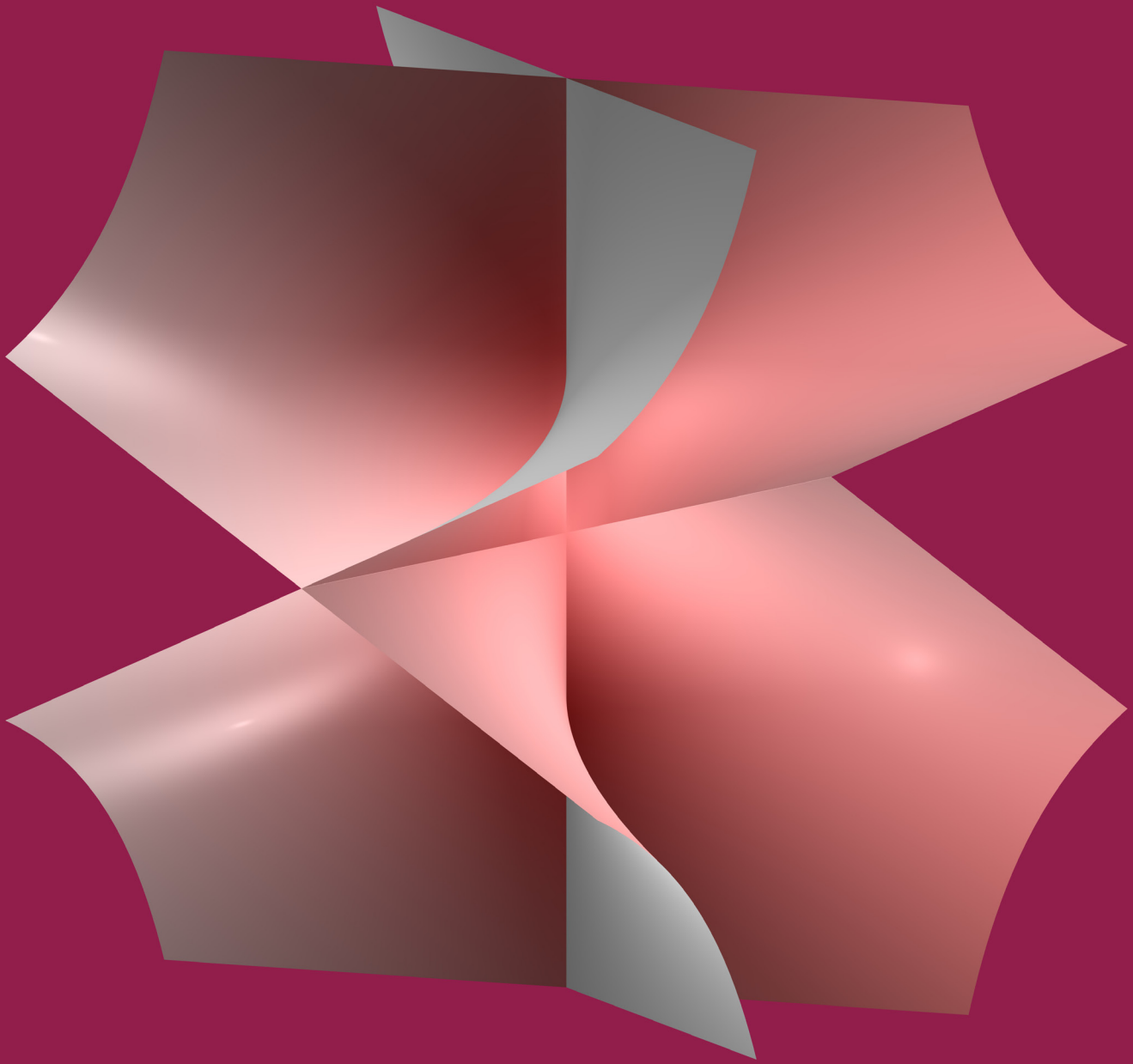
¿Caben en una bola o se extienden hasta el infinito?

Un mundo sin fin

Quizás alguna superficie te parezca francamente hermosa y tengas ganas de meterla en una bola de cristal llena de nieve, para poderla agitar y jugar con ella. Pero ¡no vayas a creer que puedes elegir cualquier superficie y meterla en tu habitación!

Hay superficies que se extienden hasta el infinito y, por muy bonitas que sean, ¡jamás las podrás meter dentro de una bola de cristal, aunque sea inmensa. Si esto ocurre, se dice que no son acotadas y para dibujarlas hemos de escoger una porción: por eso parece que algunas estén cortadas, como Embrollo, de la cual sólo vemos la porción contenida en una esfera. En cambio Nepalí está acotada. ¿Te atreves a deducirlo de su ecuación?

La propiedad de ser acotada no es fácil de percibir empíricamente, incluso con la ayuda de SURFER. Es como el averiguar si el universo está acotado; aunque no conozcas sus límites, puede ser que los tenga o que no.



Herwig Hauser, Sebastian Gann

7. Himmel und Hölle (*Comecocos*)

$$x^2 - y^2z^2 = 0$$

Creando nuevas formas

La simplicidad asombrosa del Álgebra

Para crear nuevas formas es preciso conocer las ecuaciones. Sus piezas básicas son los monomios, expresiones algebraicas con letras y números. Del monomio se distinguen los elementos siguientes:

signo, coeficiente, variables, exponentes y grado.

Por ejemplo:

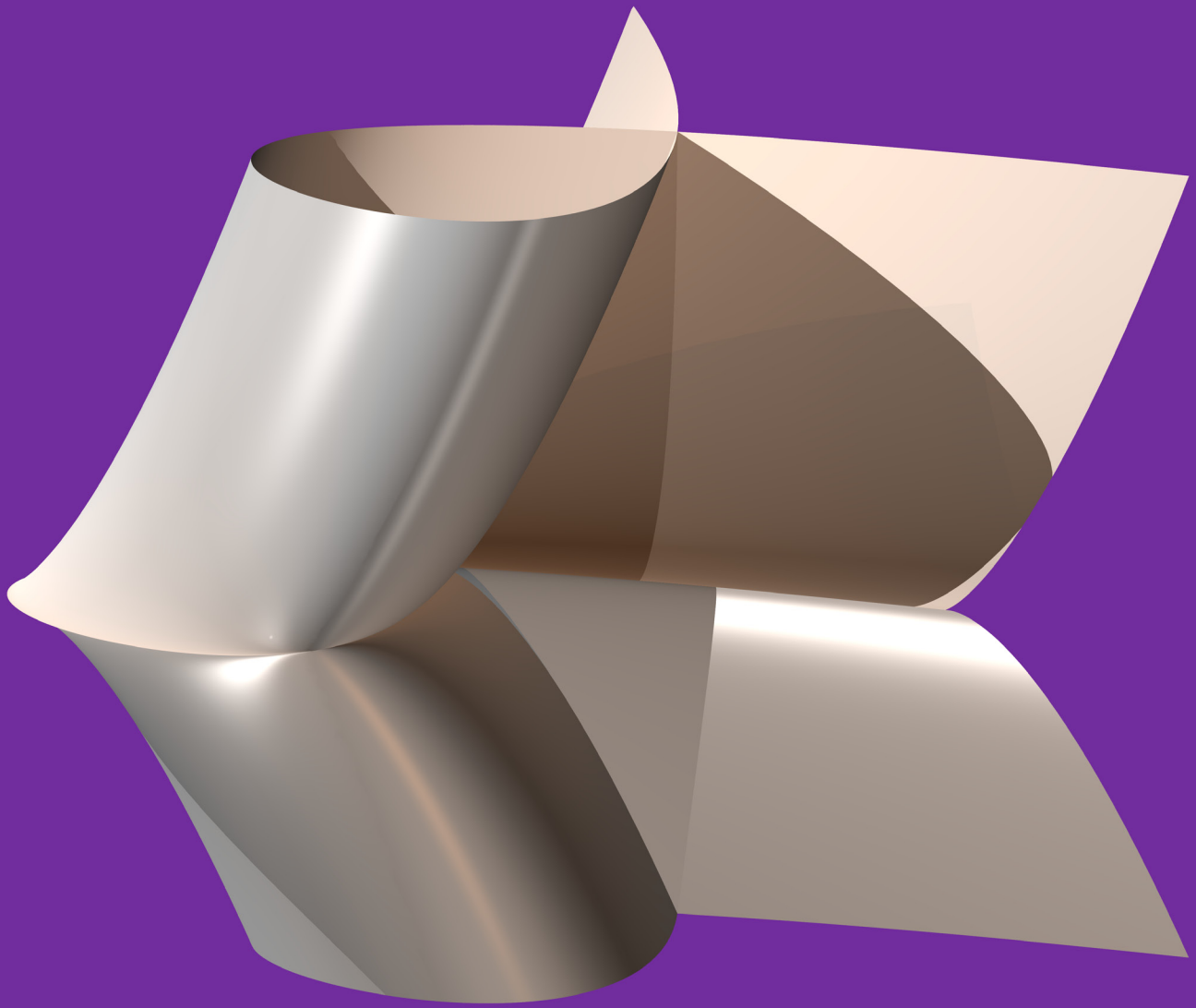
$$2xy^2z = +2x^1y^2z^1$$

El grado del monomio es la suma de los exponentes de las variables que lo componen:

$$\text{grado} = 1+2+1 = 4$$

Para formar ecuaciones sólo se usan las operaciones de suma, resta y multiplicación, que conocemos desde que somos muy pequeños. Y sin embargo, con operaciones tan simples se consigue obtener superficies muy especiales: las superficies algebraicas.

¿Te atreves a crear formas con puntas o agujeros solamente sumando y multiplicando?



8. Quaste (*Viruta*)

$$8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 + 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - 8x^6 - 24x^4y^2 - 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 - 54x^2z^4 - 108y^2z^4 + 27z^6 - 108x^2y^2z + 54y^4z - 54y^2z^3 + 27y^4 = 0$$

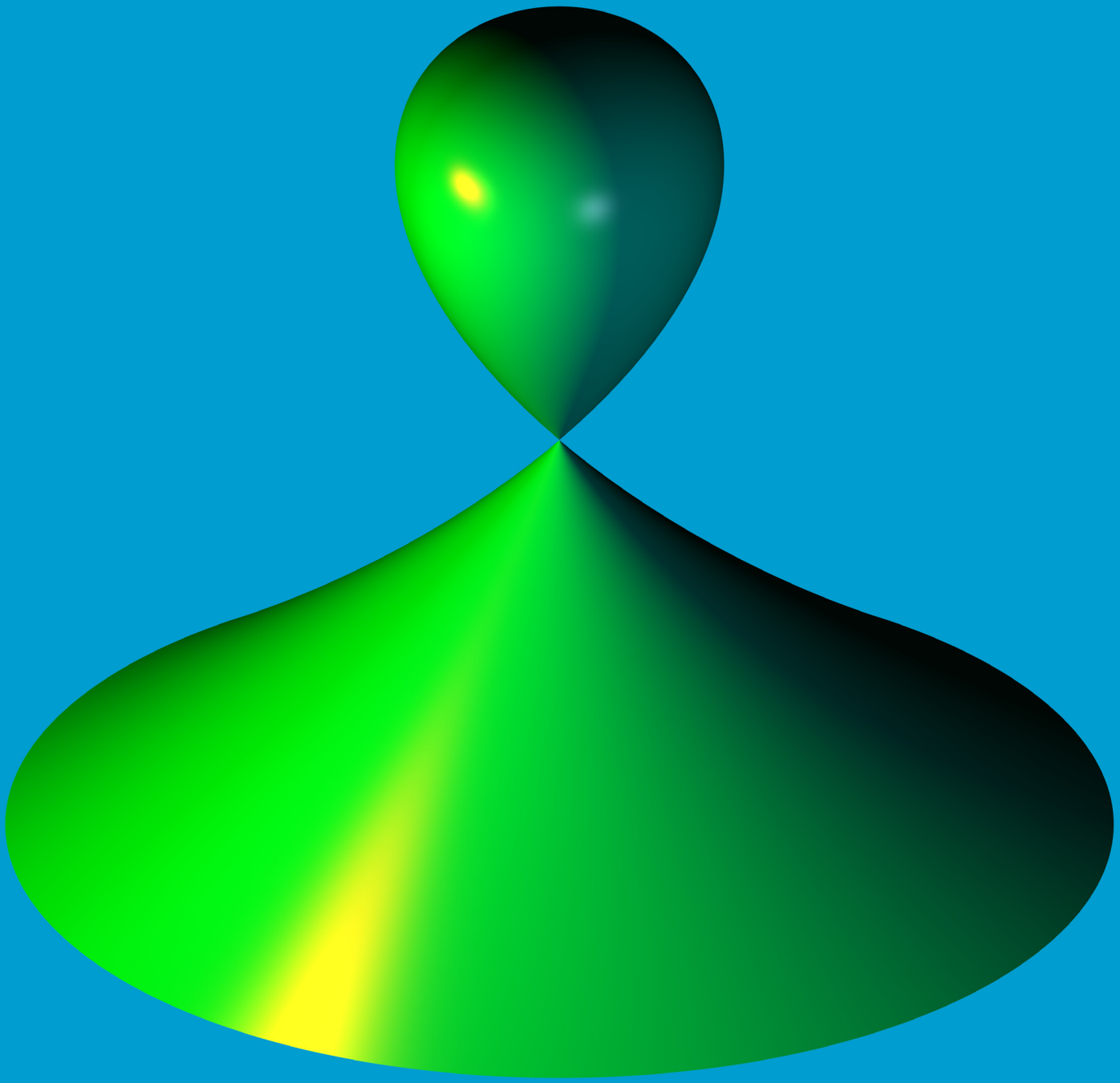
El abecedario de las ecuaciones

A mayor grado, más letras

¿Te has fijado en la ecuación de Viruta? Parece enormemente complicada. En cambio su figura es fácil de describir: el borde superior tiene la forma de la letra griega alfa, α; el borde derecho tiene la forma de una curva con una punta, llamada cúspide; si deslizas esa curva cuspidal paralelamente a lo largo de la curva en forma de alfa, obtienes Viruta. Las superficies que tienen esta propiedad se llaman productos Cartesianos en honor al matemático René Descartes.

Combinando x, y, z podemos construir monomios de grado 1, que coinciden con las mismas variables x, y, z; grado 2: x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2; y así sucesivamente. Cuanto más elevado es el grado, más monomios tenemos, y esto nos da juego para crear formas más complicadas.

Es como un abecedario: si tenemos más letras a nuestra disposición, podemos escribir palabras más complicadas.



9. Ding-dong (*Lágrima*)

$$x^2 + y^2 + z^3 = z^2$$

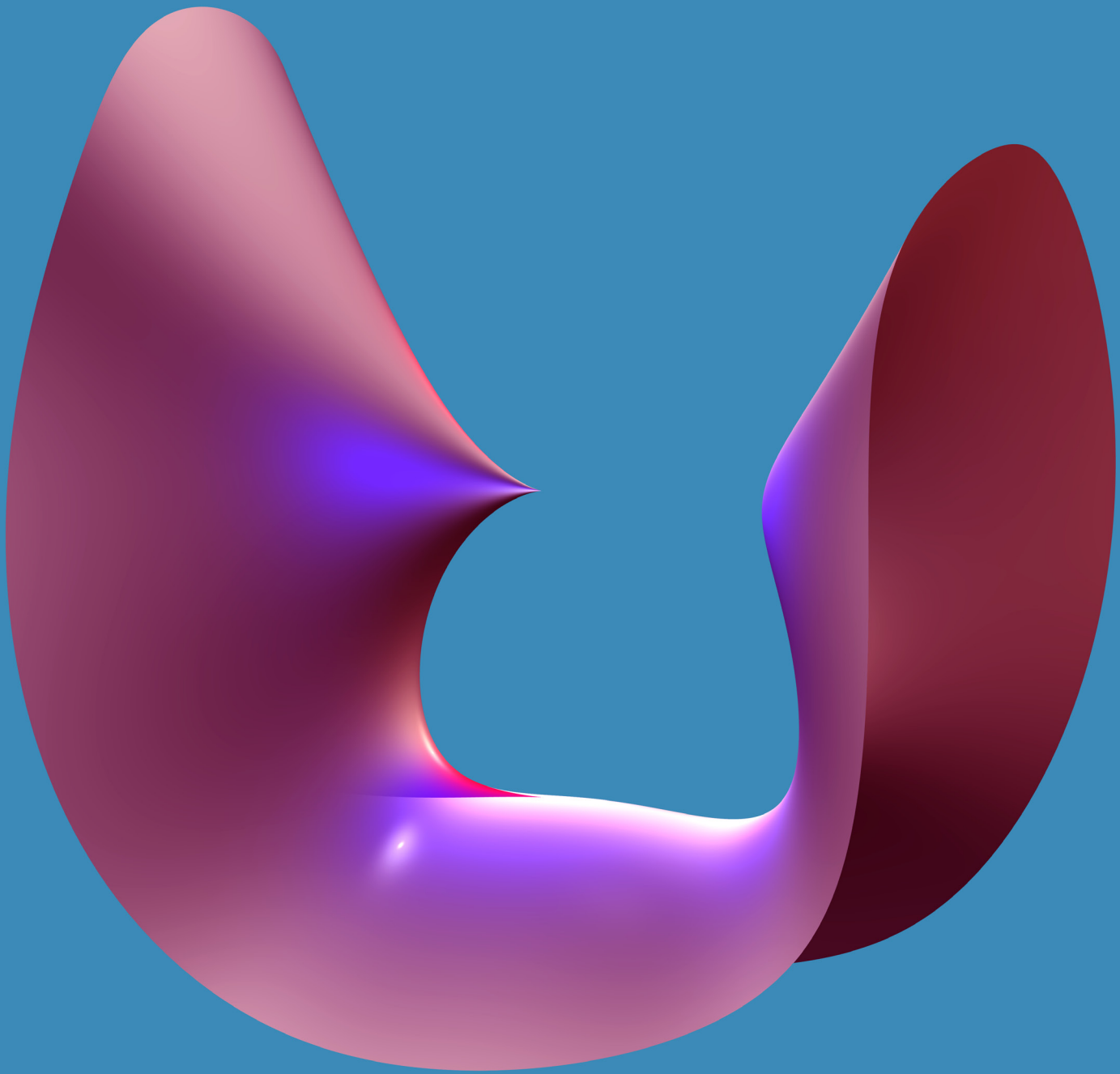
Deformar la figura deformando la ecuación

El equilibrio de las estalactitas

La ecuación y la forma de Lágrima son muy simples. La figura se ha obtenido girando la forma de la letra griega alfa alrededor de un eje. Mirándola al revés parece una gota de agua. ¡Casi se podría decir que la vemos caer!

Añadiendo parámetros a su ecuación, y modificándolos de manera continua, podemos crear una secuencia de imágenes en las que podríamos ver cómo se genera la gota, cómo se va acercando a su posición límite, y cómo finalmente se desprende. Es como crear una secuencia de fotogramas de una película.

En cada instante, la gota está en una situación de equilibrio, donde la fuerza de la gravedad compensa la tensión superficial del líquido. Pero el equilibrio de Lágrima es claramente inestable, y las gotas pasan por él temblando hasta desprenderse. La Teoría de Catástrofes del matemático René Thom estudia como pequeños cambios de los parámetros pueden llevar a súbitos cambios de equilibrio.



10. Vis à Vis (*Tú y Yo*)

$$x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$$

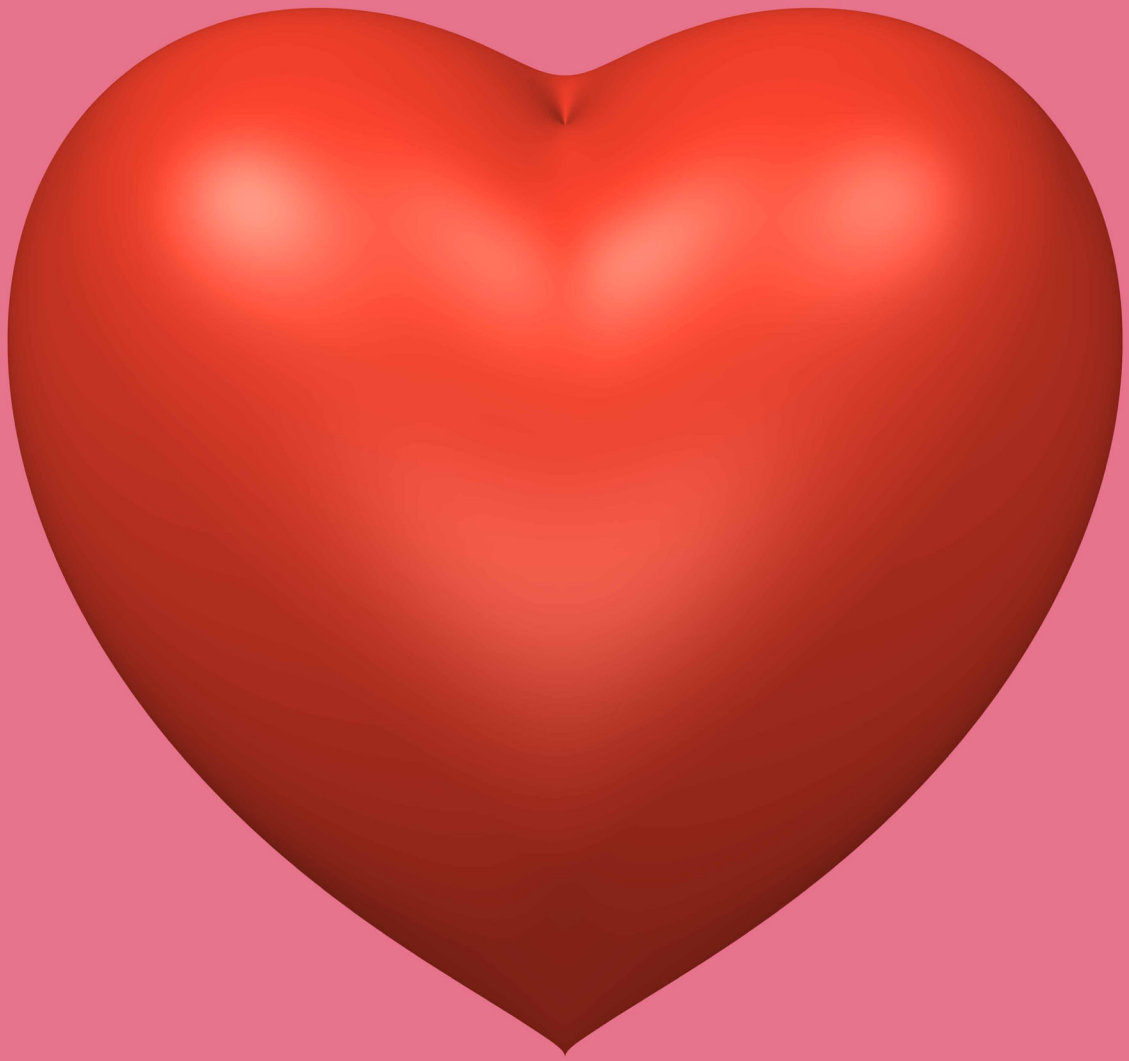
Singular versus liso

Amigos o enemigos

Los puntos singulares, o singularidades, a menudo se identifican fácilmente de forma visual porque son puntos donde la superficie no es lisa ni suave, como por ejemplo un pico o un pliegue.

La superficie Tú y Yo ilustra muy bien lo que es una singularidad, el pico de la izquierda, y lo que no lo es, la colina lisa de la derecha. Las singularidades son interesantes entre otras cosas porque, al contrario de lo que ocurre con los puntos lisos que son estables, pequeños cambios en la ecuación pueden cambiar su aspecto de un modo sorprendente.

¿Sabes que hay gente que se dedica especialmente al estudio de estos puntos? Los agujeros negros y el principio del universo, Big Bang, son singularidades de las ecuaciones de los modelos cosmológicos. Sin ir más lejos, ¡las singularidades de nuestras huellas dactilares nos identifican!



11. Süss (*Pasión*)

$$(x^2 + 9/4y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - 9/80y^2z^3 = 0$$

Singularidad en el corazón

¿Te imaginas un corazón sin punta?

"En el corazón tenía
la espina de una pasión;
logré arrancármela un día:
ya no siento el corazón".

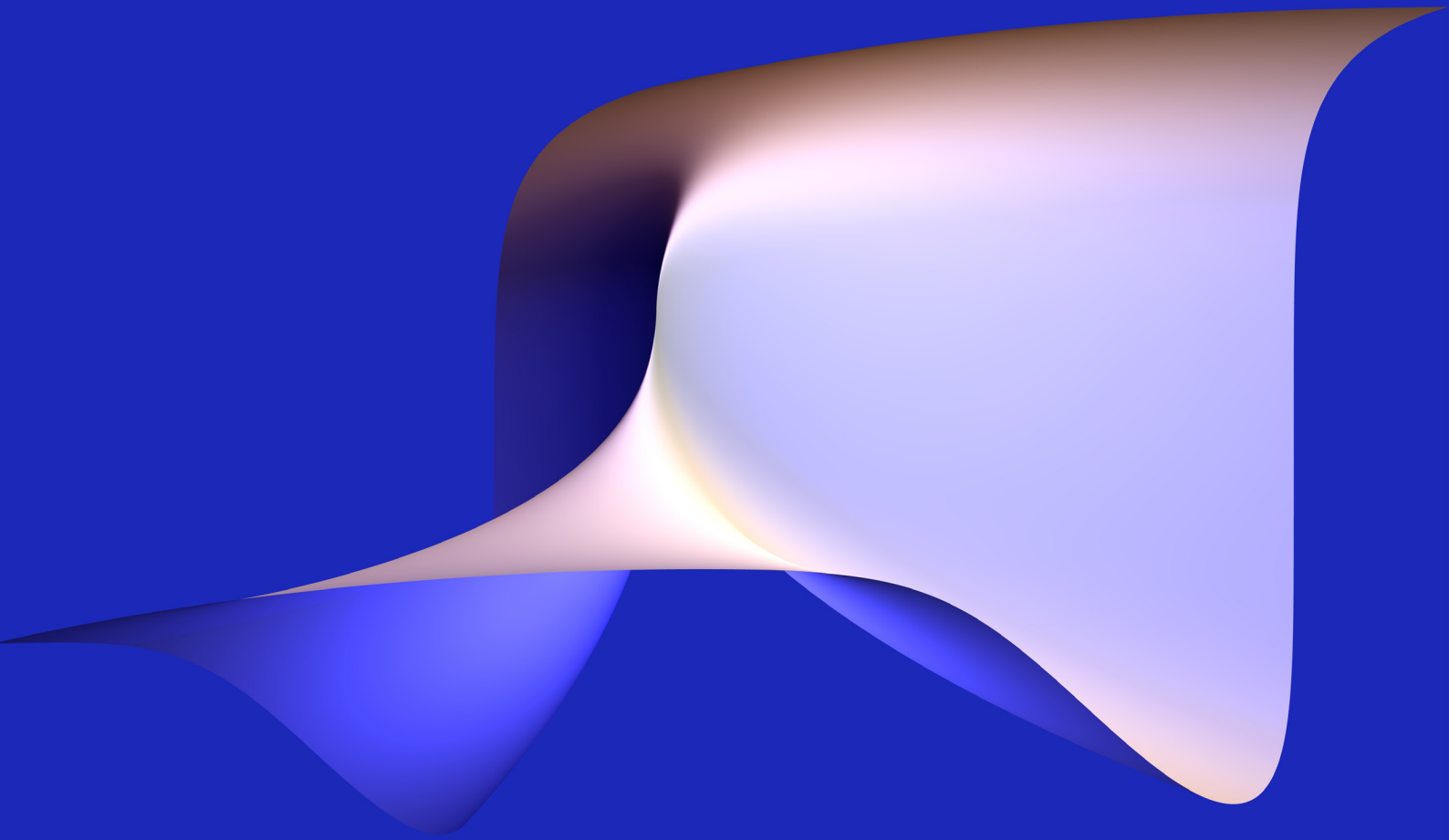
Y todo el campo un momento
se queda, mudo y sombrío,
meditando. Suena el viento
en los álamos del río.

La tarde más se oscurece;
y el camino que serpea
y débilmente blanquea,
se enturbia y desaparece.

Mi cantar vuelve a plañir:
"Aguda espina dorada
quién te pudiera sentir
en el corazón clavada".

Soledades XI (fragmento), Antonio Machado

La pasión amorosa acostumbra a identificarse con la fuerza emotiva de alguna "singularidad" dolorosa y por ello esta asociación ha sido ampliamente usada en el mundo del arte, no solamente arquitectónico y pictórico, sino también en el narrativo e interpretativo.



12. Sofa (*Sofá*)

$x^2 + y^3 + z^5 = 0$

Controlar lo impredecible

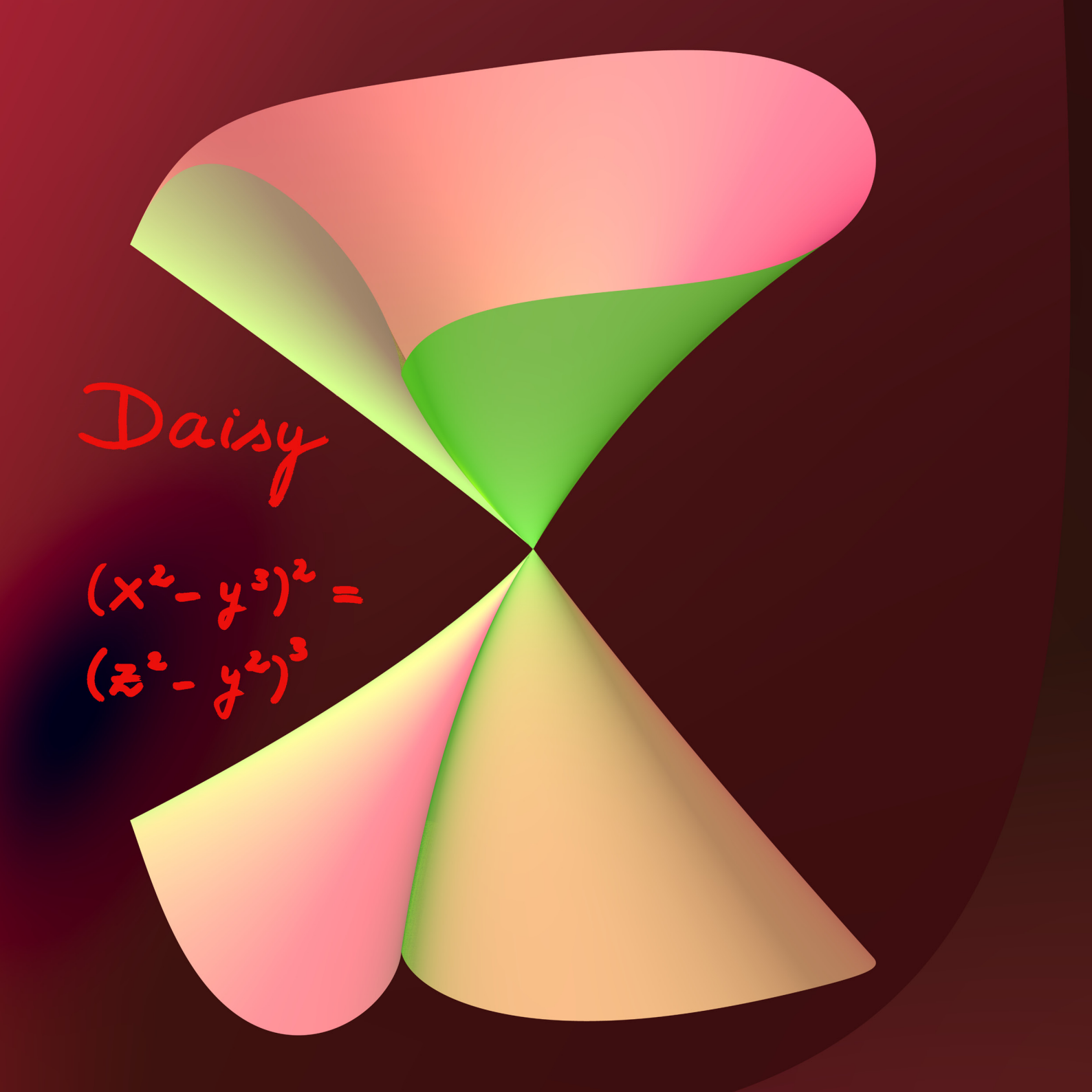
Singularidades con suspense

Aunque Sofá tenga la forma de un moderno sillón, ¡no parece nada cómodo!

Si se sitúa una canica en el pliegue de Sofá, no podemos prever hacia dónde caerá; en cambio, es fácil imaginarse la trayectoria de la canica si se sitúa en cualquier otro punto.

Esta impredecibilidad se manifiesta en informática: para dibujar una superficie, esculpirla, o calcular la trayectoria de una canica deslizándose sobre ella, se necesita encontrar una malla suficientemente tupida de puntos solución, y para este fin las singularidades son un obstáculo, ya que los errores de redondeo pueden superar la distancia entre las dos laderas del pliegue.

Una estrategia para solventar este inconveniente es aproximar previamente la ecuación cerca de los puntos singulares. Y acostumbra a tener éxito, ya que ¡la forma de una superficie cerca de un punto se puede aproximar muy bien!


Daisy
$(x^2 - y^3)^2 =$
$(z^2 - y^2)^3$

13. Daisy (*Campanilla*)

$$(x^2 - y^3)^2 = (z^2 - y^2)^3$$

Con ojo matemático

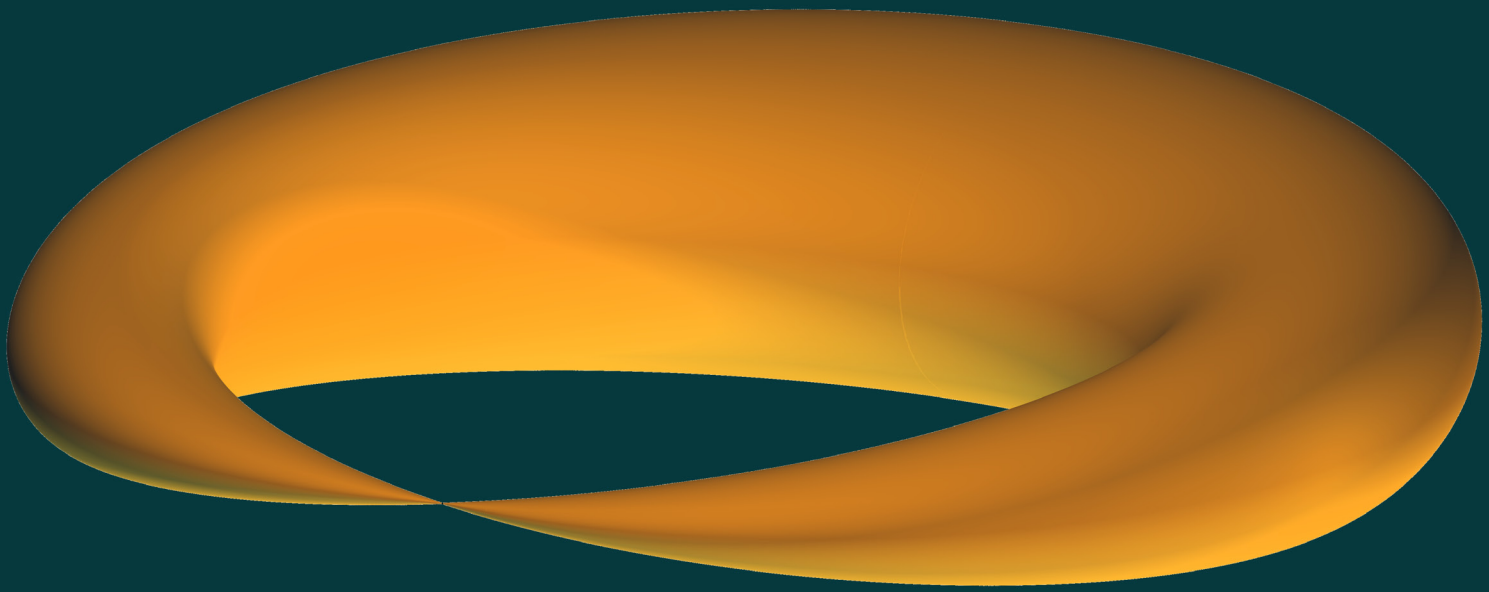
Reconocer las singularidades

Has aprendido que puntas y pliegues son singularidades, aunque hay más tipos. Pero imagina ahora que te tapan los ojos y te impiden tocar la superficie. ¿Cómo podrías encontrar sus singularidades?

Las singularidades se definen como todos aquellos puntos de la superficie que son solución de las derivadas parciales de su ecuación. Este método permite encontrar las singularidades con papel y lápiz, sin ni siquiera tener cerca la superficie, tan sólo mediante su ecuación.

Por ejemplo, derivando la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, que representa un cono, respecto de x, obtenemos 2x; respecto de y, 2y; y respecto de z, $-2z$. Estas tres derivadas se anulan a la vez sólo en el punto (0,0,0). Como (0,0,0) es un punto del cono, hemos encontrado el único punto singular del cono, que, como podíamos esperar, ¡es la punta del cono!

Si sigues este método con Campanilla, encontrarás que sus puntos singulares forman dos curvas planas que se cortan transversalmente en su punto singular común.



14. Croissant (*Cruasán*)

$$(x^2+y^2+z^2 + 7\sqrt{5}/2 -11/2)^2 - ((1+ \sqrt{5})x - 7 + 3\sqrt{5})^2 - (1+ \sqrt{5})^2\, y^2 = 0$$

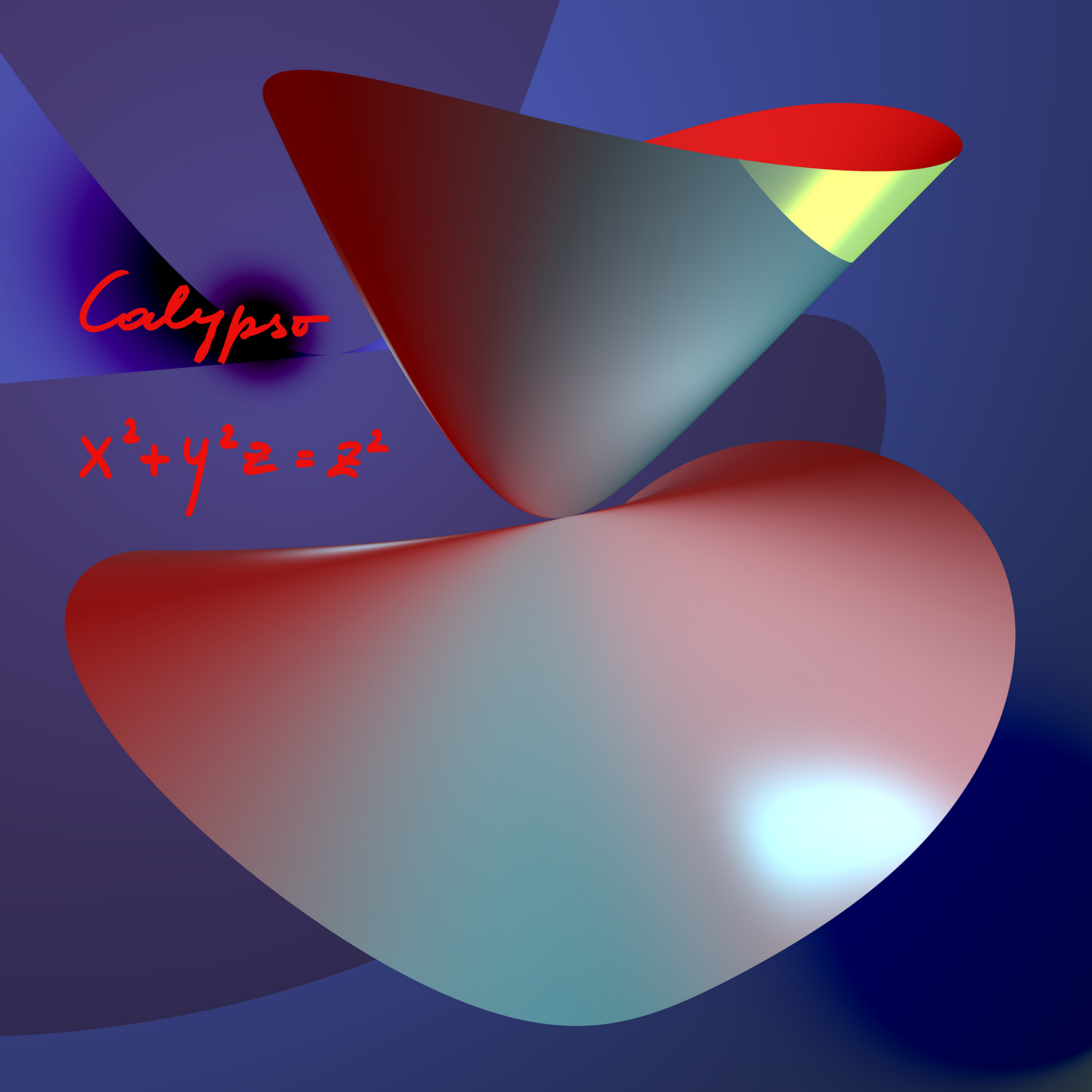
Resolver para comprender

Cuando los puntos explotan

Para comprender mejor las singularidades, se utilizan técnicas que permiten transformar, en un número finito de pasos, superficies singulares en superficies lisas.

Una manera de entender esto es mediante globoflexia: con globos alargados podemos obtener fi-guras girando y estrangulando la goma. Cruasán tiene una estrangulación en su punto singular; si la deshacemos obtenemos un "donut", una forma llamada Toro. Concretamente, el punto de Cruasán explota y se transforma en una circunferencia del Toro.

Todo el proceso se denomina re-solución de singularidades. Por ejemplo, dado un perro salchicha con varias estrangulaciones (singularidades), podemos deshacerlas hasta obtener el globo original bien liso. Pero, ¡ojo!, para volver a montar el perrito, tendremos que recordar los pasos: resolver y recordar.


Calypso
$X^2+Y^2Z=Z^2$

15. Calypso (*Calipso*)

$$x^2 + y^2 z = z^2$$

La estética de la inestabilidad

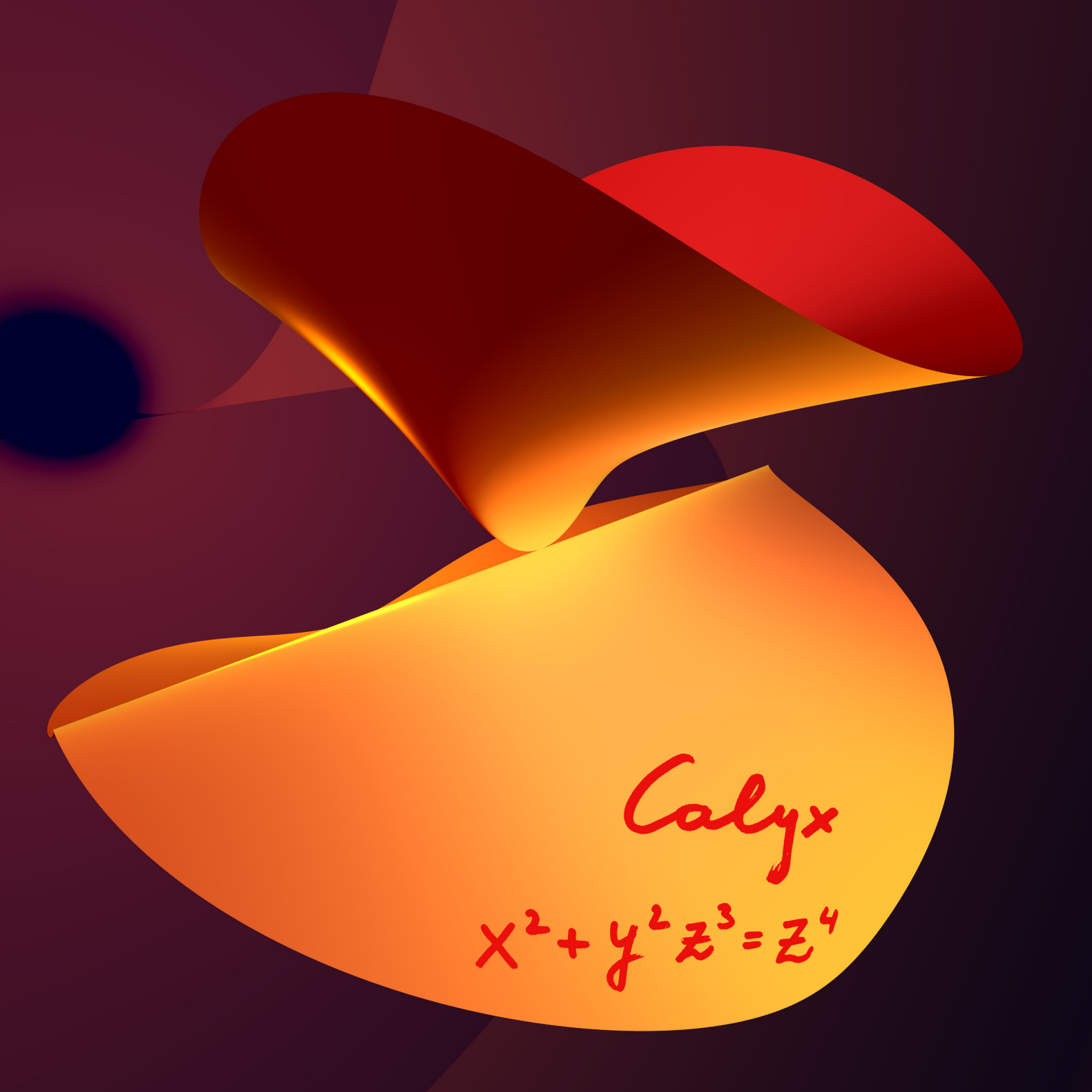
Ecuaciones de la creatividad

Las singularidades son delicadas o inestables, como Calipso. Pequeñas modificaciones en su ecuación transforman la superficie radicalmente.

La inestabilidad de las singularidades es la esencia de su belleza. Esto también ocurre en arquitectura, por ejemplo con las superficies plegables: su inestabilidad permite el movimiento de la estructura y así cambiar su forma.

¿Sabías que los arquitectos usan ecuaciones para saber qué forma va a presentar su obra en cada momento durante el despliegue? Los grandes arquitectos son también grandes conocedores de las Matemáticas, y las ecuaciones les permiten experimentar con las formas soñadas.

> El plegado, como un medio para cambiar la forma de un armazón, contradice el principio de estabilidad en tanto que esta última es la capacidad de retener la forma. Así, una estructura plegable debe necesariamente ser inestable.
>
> Olga Gil Medrano, *Un mundo en el bolsillo, la geometría plegable de Santiago Calatrava*.


Calyx
$X^2+y^2z^3=z^4$

16. Calyx (*Cálix*)

$x^2 + y^2z^3 = z^4$

Elevarse a dimensiones superiores

Atrapadas en la caverna de las sombras

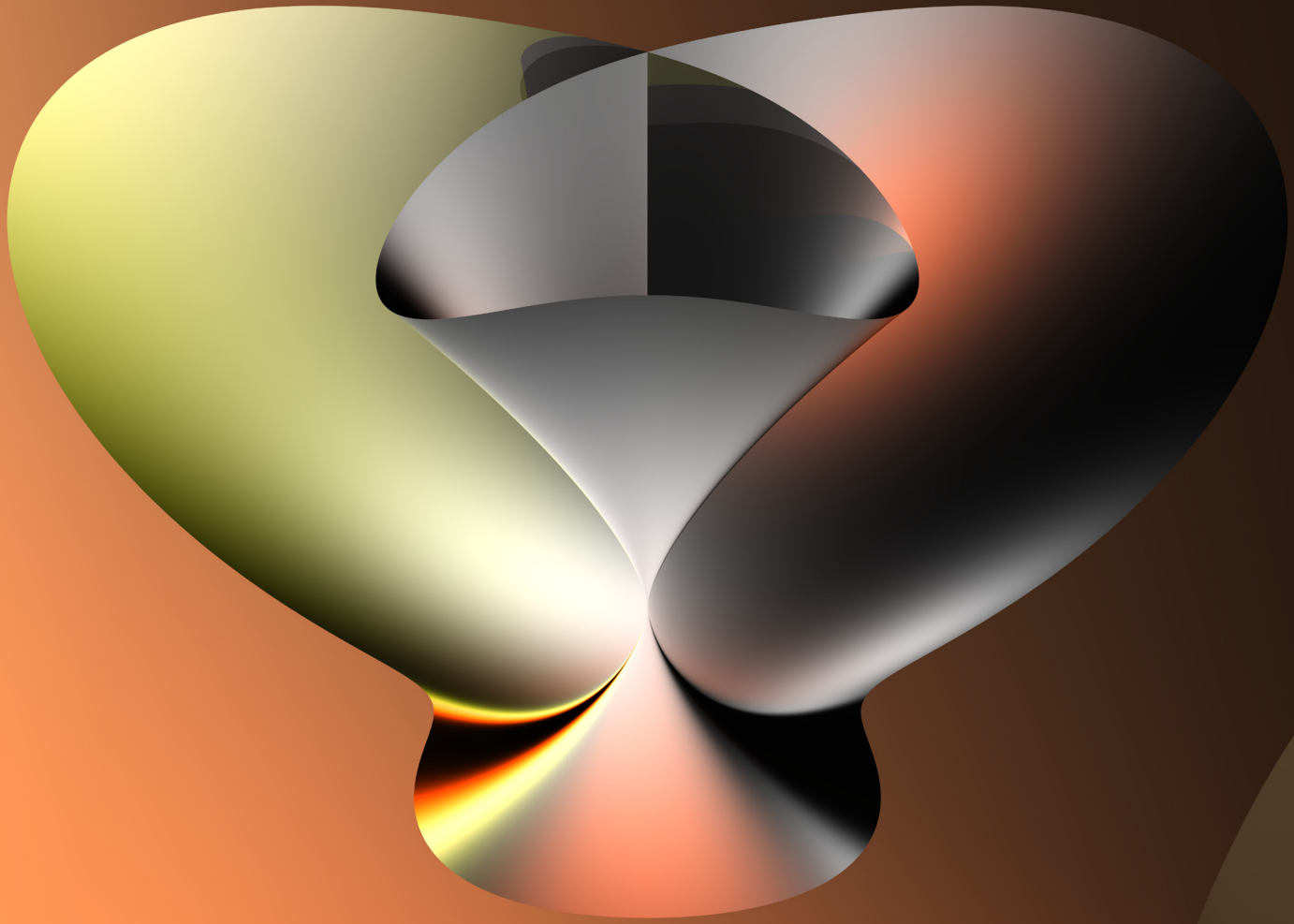
Los puntos singulares de Cálix son todos los del eje y. Si explotamos esta recta, como hicimos con el punto singular de Cruasán, obtenemos un cilindro, y ¡Cálix se transforma en Calipso! Si vuelves a contemplar a Calipso no verás este cilindro porque habita en dimensiones superiores, y sólo comparte con Calipso y su mundo tridimensional una recta.

Otra manera de entender esto es imaginando el proceso inverso: mediante una proyección adecuada en un espacio 5-dimensional la superficie del cilindro se contrae a la recta singular de Cálix, y de este modo ¡Cálix es la sombra de Calipso!

Un resultado sorprendente del matemático Heisuke Hironaka afirma que cualquier superficie con alguna singularidad es la sombra de alguna superficie lisa, es decir, sin singularidades, que puede habitar en un espacio de dimensión superior a tres.

Podemos imaginar que el mundo tridimensional es una caverna que atrapa las sombras de realidades de dimensión superior...

Taube



17. Taube (*Pajarita*)

$$256z^3 - 128x^2z^2 + 16x^4z + 144xy^2z - 4x^3y^2 - 27y^4 = 0$$

Origami multidimensional

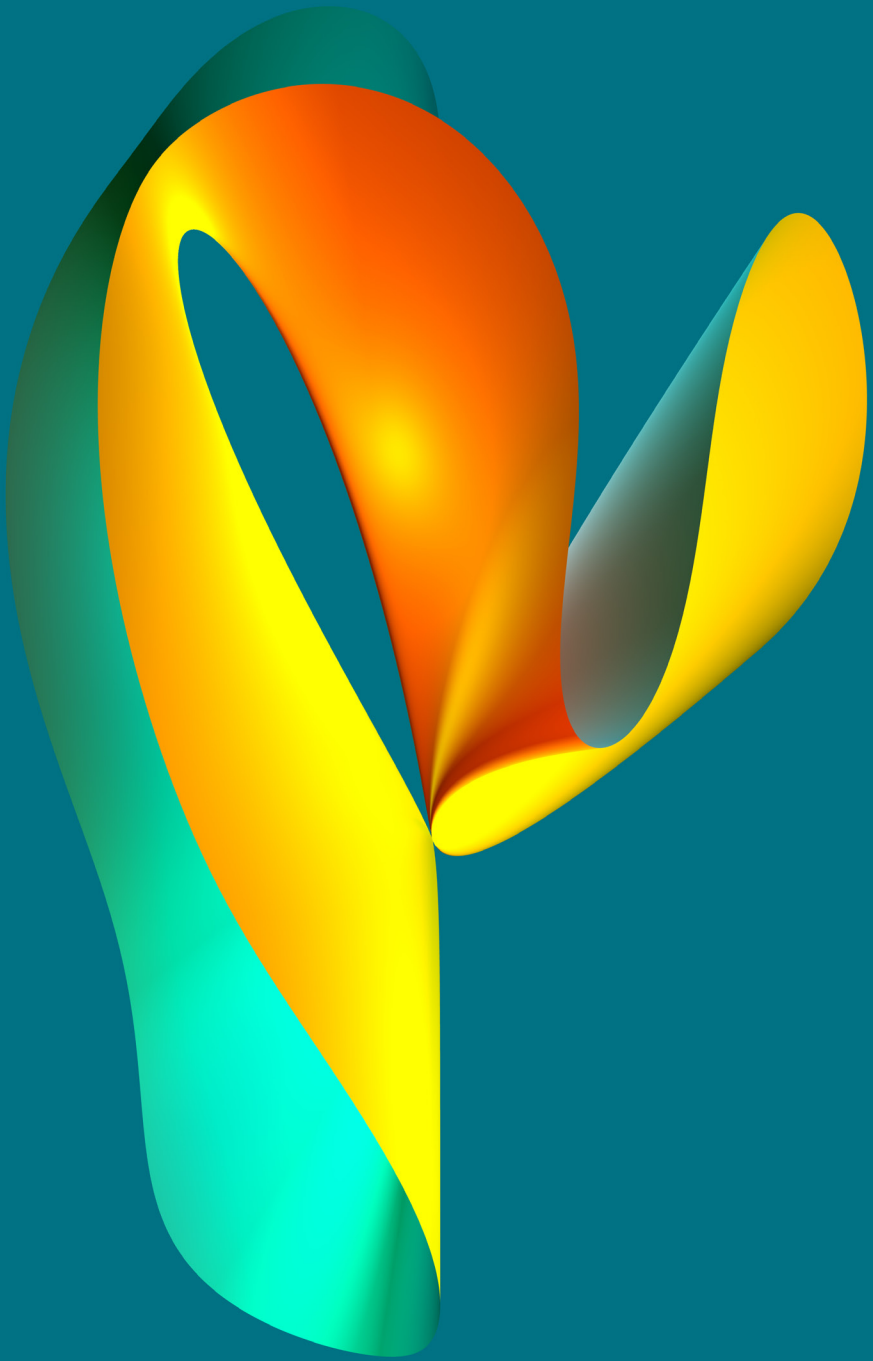
La ubicuidad de las cúspides

Si se nos cae un mantel al suelo, queda lleno de pliegues. La caída determina una asignación, o proyección, de los puntos del mantel en los del suelo, y los puntos de los pliegues forman una curva llamada discriminante.

La manera de saber si un punto es del discriminante, es decir, de un pliegue, es atravesando con un alfiler el mantel alrededor del punto: si el número de capas atravesadas no es el mismo en un entorno pequeño del punto, podemos asegurar que está sobre un pliegue.

Hassler Whitney observó que, en general, hay dos tipos de puntos en un pliegue: los que componen la curva del pliegue y su punto extremo. Estos puntos extremos se llaman cúspides.

Imagina que, en vez de superficies, manipulas objetos algebraicos de dimensión superior y que puedes hacer proyecciones entre ellos. Entonces el discriminante, o los pliegues, ya no serían curvas sino superficies o variedades de dimensión superior. Así es como aparece la figura de Taube: es una superficie discriminante.



18. Seepferdchen (*Caballito de mar*)

$$(x^2 - y^3)^2 = (x + y^2)z^3$$

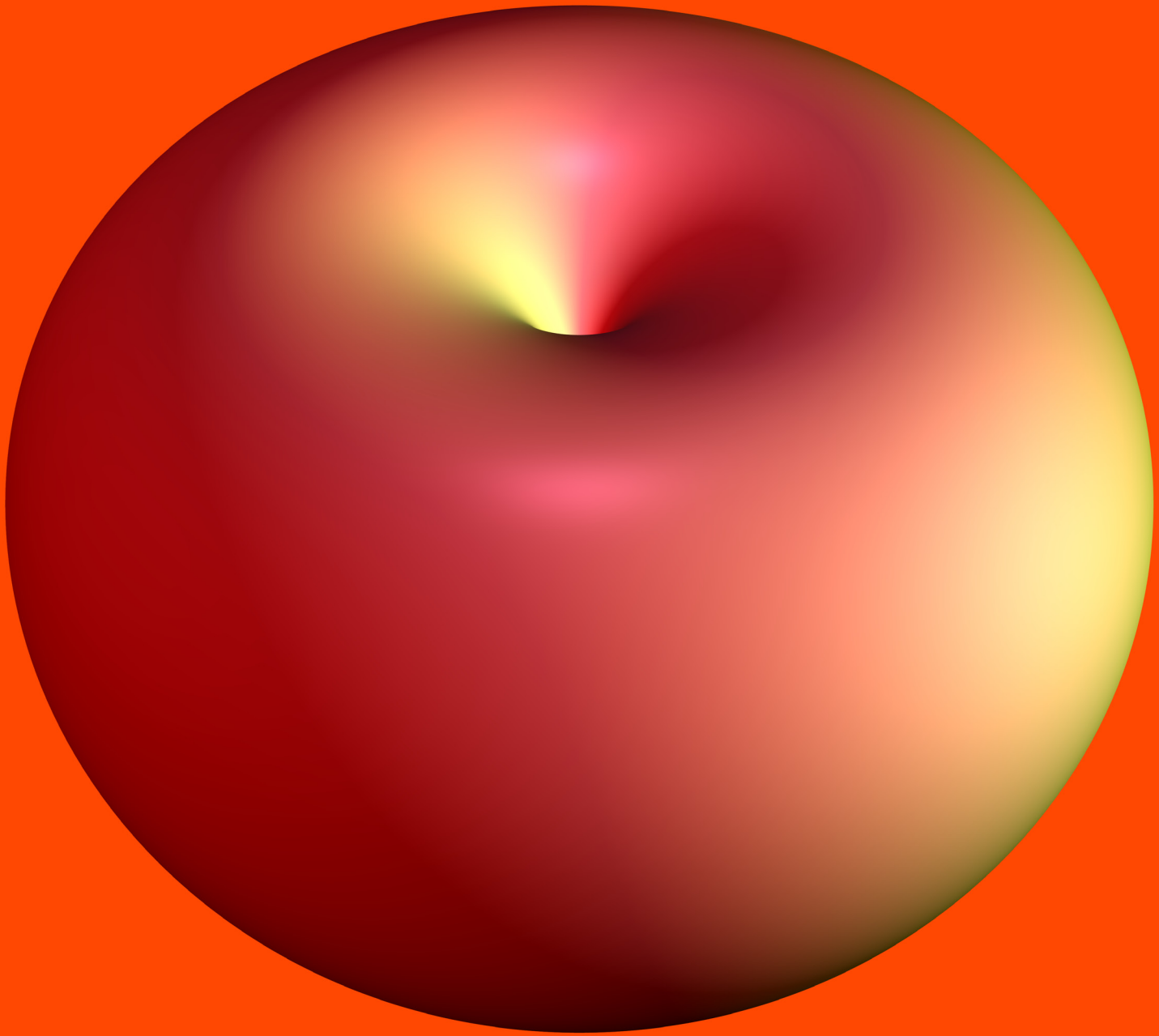
Singularidades delicadas

Contactos sutiles

La superficie Caballito de Mar se repliega y se autointerseca en un único punto, que es singular. El suave contacto tangencial entre las dos porciones es muy difícil de conseguir jugando con ecuaciones. Se trata de una singularidad muy delicada, y cualquier pequeña modificación de la ecuación destruye este contacto sutil. ¡Cambia su ecuación mediante SURFER y observa el resultado!

Quizás esta bonita superficie se llama así porque los caballitos de mar también son animales muy delicados. Sólo viven en praderas de posidonia y zonas arenosas.

Pero la delicadeza de esta singularidad quizás es más comparable a la de la mimosa púdica. Es una planta que no permite que la toquen sin cambiar de forma: si alguien intenta hacerlo, ella, a modo de protección, cierra sus hojas y se coloca en una posición en la que no permite que miren su interior.



19. Dullo (*Manzana*)

$$(x^2+ y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$$

Fenómenos singulares en la naturaleza

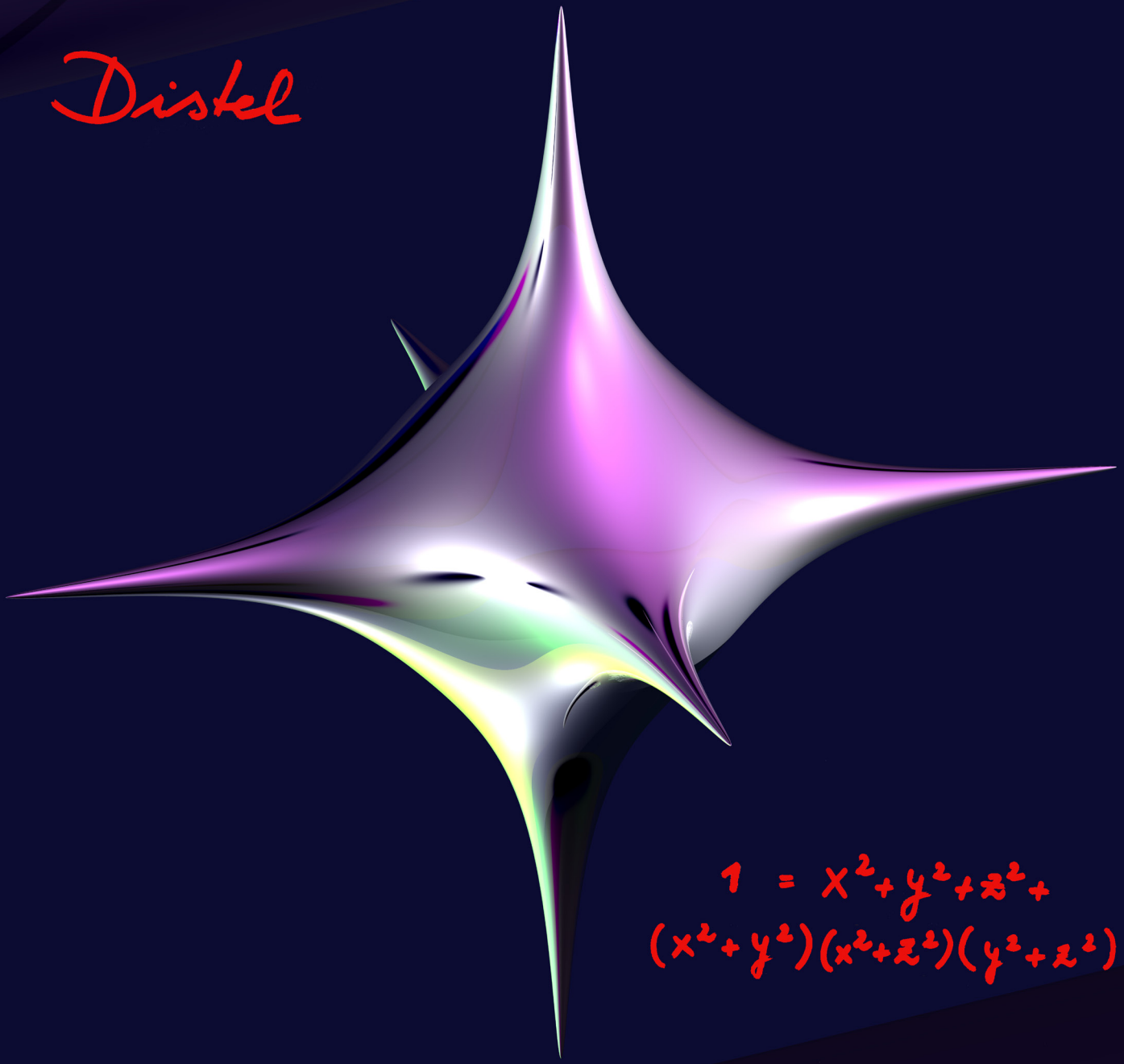
Comprender las singularidades para planificar

Las Matemáticas están muy estrechamente relacionadas con otros campos del conocimiento como la Física, la Química o la Tecnología. Proporcionan potentes herramientas para entender el mundo que nos rodea.

Muchos fenómenos que nos encontramos al estudiar la naturaleza dan lugar a modelos con singularidades, y conocerlas ayuda a evitarlas o a planificar estrategias para atravesarlas. Así ocurre con el diseño y funcionamiento de robots.

Otro ejemplo es la propagación de las ondas de sonido producidas por la ovación del público en un estadio, que toma la forma de la superficie Manzana, con una singularidad en su centro. Por esta razón y para proteger sus oídos, el árbitro de fútbol evita estar en el centro del campo cuando se celebra un gol.

Distel



$$1 = x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)$$

20. Distel (*Destello*)

$$x^2+y^2+z^2+1500(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2) = 1$$

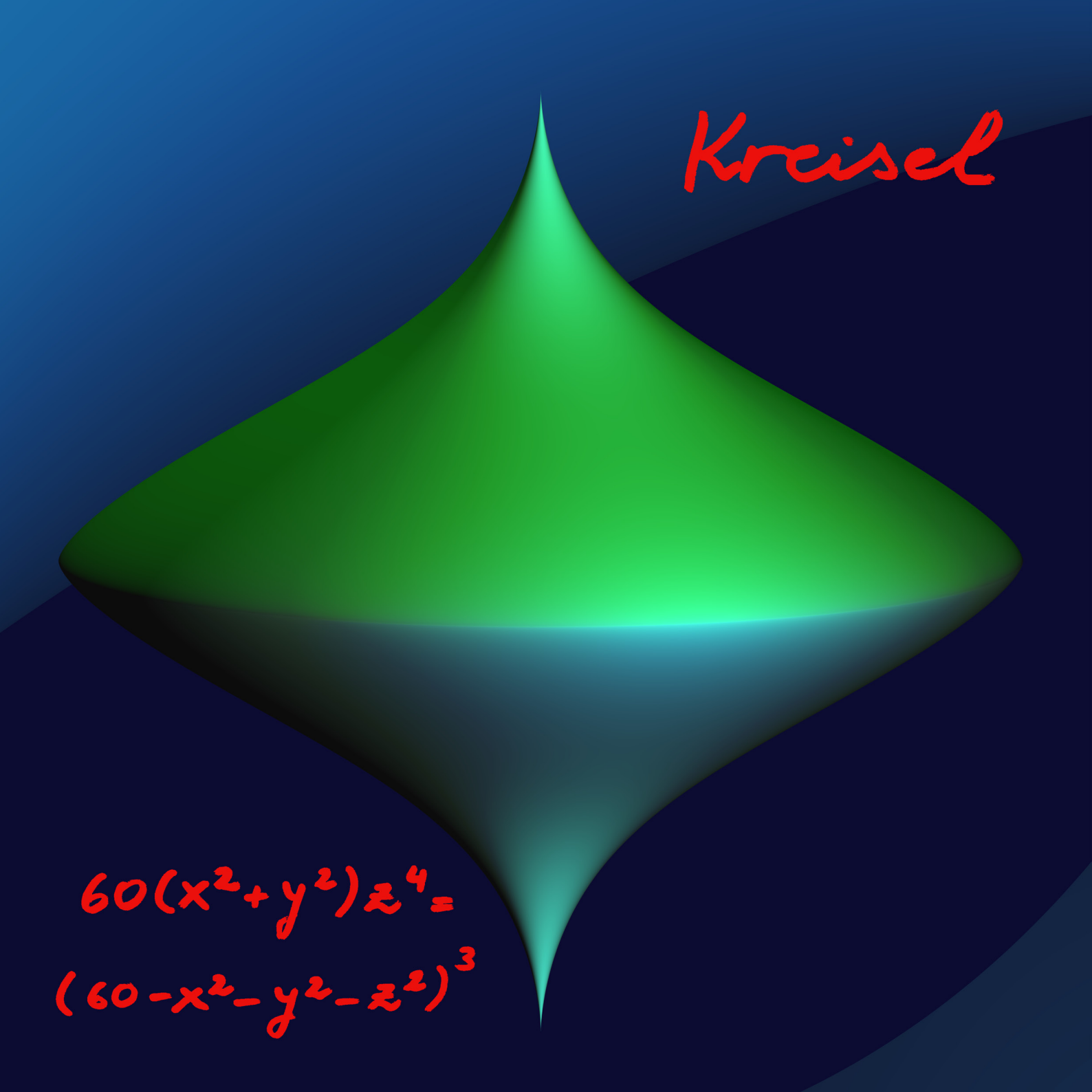
¿Formas caprichosas?

Encajes singulares

La imagen en blanco y negro parece una fotografía de Destello, pero en realidad es la de un virus. Los virus utilizan sus pinchos, sus singularidades, a modo de llaves para entrar en las células, en donde pueden dividirse y crecer.

Una figura es simétrica si existe una transformación que la deja igual. Las simetrías de una figura se pueden reconocer a través de su ecuación. En Destello, por ejemplo, cualquier permutación de las variables de su ecuación da la misma ecuación y por eso tiene el mismo aspecto sea cual sea la punta que tenemos enfrente.

Estudiando las simetrías de los azulejos, los matemáticos demostraron que sólo hay 17 maneras de recubrir una superficie plana con baldosas. Todas ellas ya se encuentran en los muros de la Alhambra de Granada. Este mismo tipo de investigaciones en tres dimensiones permiten clasificar los cristales y las moléculas.


Kreisel
$60(x^2+y^2)z^4=$
$(60-x^2-y^2-z^2)^3$

21. Kreisel (*Giroscopio*)

$$60\,(x^2 + y^2)\,z^4 = (60 - x^2 - y^2 - z^2)^3$$

A través del espejo

Mi otro yo

Una de las simetrías más usadas en el mundo literario y místico es la especular. El nombre hace referencia a los reflejos, por ejemplo en un lago o en un espejo.

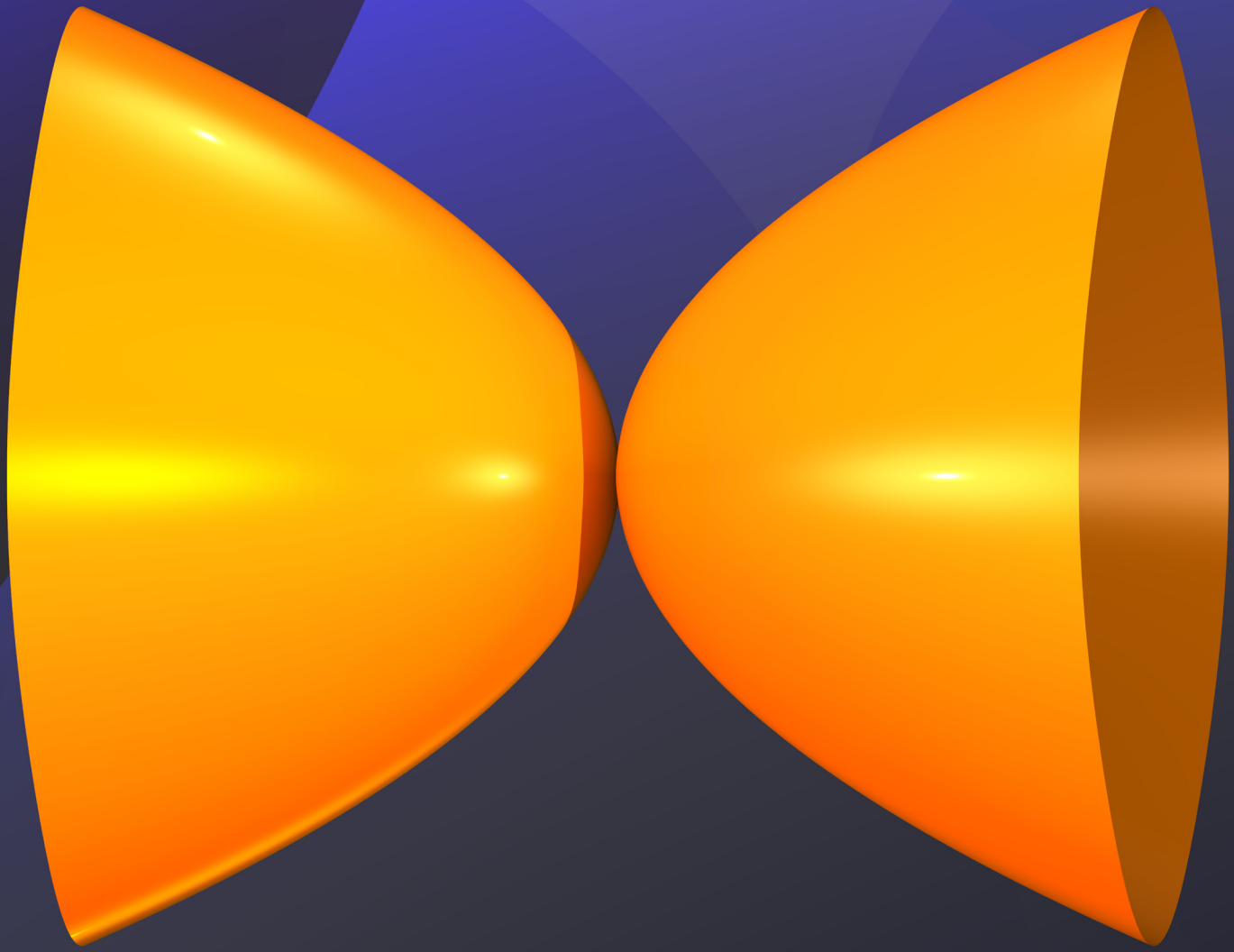
Un ejemplo de ella es Giroscopio. Si debajo de la parte verde hubiera un lago, la parte azul parecería su reflejo. ¡Así es como funciona la simetría especular! Fíjate que en su ecuación la variable z solo aparece con exponentes pares.

Para muchos autores, esta simetría ha inspirado un mundo donde izquierda es derecha, los niños son adultos y la gente rejuvenece.

Esta idea viene de la propiedad matemática de la simetría especular de invertir la orientación. Esto nos lo explica la conversación entre el escritor L. Carroll, autor de "Alicia a través del espejo", y una niña, Alice:

> –Primero quiero que me digas en qué mano tienes la naranja.
> –En la derecha –contestó Alice.
> –Ahora –dijo Carroll– fíjate en el espejo y dime en qué mano tiene la naranja la niña que ves en él.
> –En la izquierda –dijo Alice.
> –¿Y cómo se explica eso? –le preguntó Carroll.
> La niña se quedó dudando, pero al fin dijo:
> –Si yo estuviera al otro lado del espejo, ¿no es cierto que la naranja seguiría estando en mi mano derecha?
> –¡Bravo, mi pequeña Alice! –exclamó Carroll– ¡Es la mejor respuesta que he recibido hasta el momento!
>
> Stuart Dodgson Collingwood, La vida y cartas de Lewis Carroll

Diabolo



$$x^2=(y^2+z^2)^2$$

22. Diabolo (*Diábolo*)

$$x^2 = (y^2 + z^2)^2$$

La revolución de la revolución

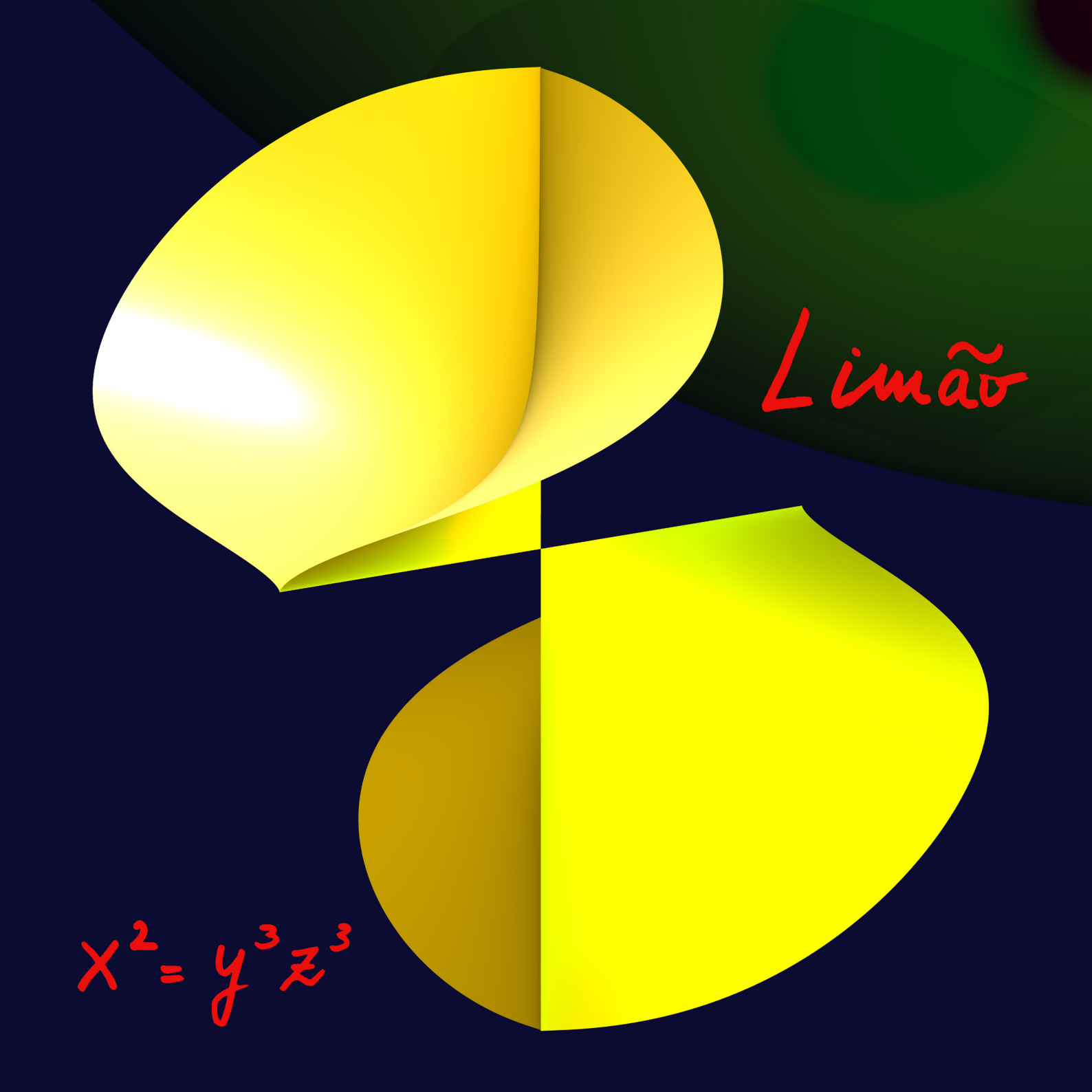
Las superficies del alfarero

La porción de la derecha de Diábolo es simétrica de la porción izquierda. Además parece que cada una de ellas se haya obtenido usando un torno de cerámica, haciendo girar una curva parabólica. Las superficies que se obtienen haciendo girar una curva se llaman superficies de revolución, y la curva que hemos hecho girar se llama generatriz.

Es lo que le ocurre al volcán Rangitoto, que se encuentra en Auckland, Nueva Zelanda, a unos 19000 km de aquí: por muchas vueltas que des a su alrededor, el paisaje te parecerá siempre igual.

> Conozco Rangitoto. La gente de Auckland se volvía para verlo, señalarlo y decir: Tiene una forma peculiar; sea cual sea el ángulo desde el que se mire es igual; es el lugar más emblemático de Auckland, su fenómeno. Lo observaban y observaban, pero no lo conocían, y Grace no lo conocía, aunque si había aprendido a asignarle atributos poéticos; su uniformidad exterior oculta una sorpresa interior.
>
> Janet Frame, *Hacia otro verano*.

Cada una de las dos superficies que forman Diábolo oculta una sorpresa interior: es un espejo parabólico y los reflejos los rayos de luz paralelos al eje de revolución se cortan en un punto.


Limão
$X^2 = y^3 z^3$

23. Limao (*Lima*)

$$x^2 - y^3z^3 = 0$$

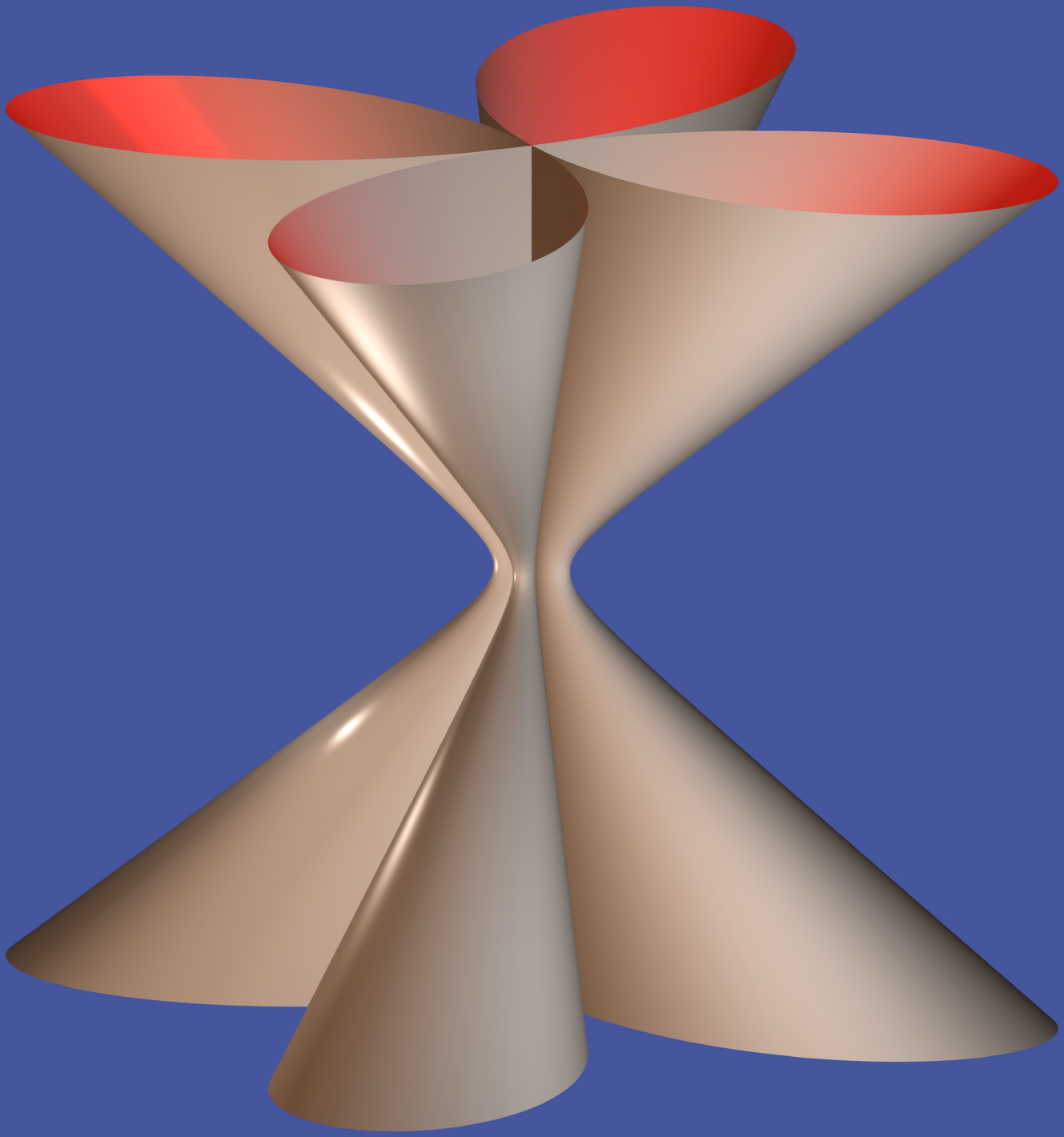
En el punto de equilibrio

El egocentrismo de las figuras

Una figura tiene simetría central cuando todos sus puntos están dispuestos regularmente respecto de un punto, llamado centro de simetría: cada punto tiene un punto simétrico en la figura a igual distancia del centro, en la misma dirección pero en sentido opuesto.

En Lima puedes detectar fácilmente cuál es su centro de simetría. Aunque en este caso el centro pertenece a la figura, no siempre es así. Si el centro es el origen de coordenadas, la simetría central se descubre fácilmente en la ecuación: sustituyendo (x,y,z) por (–x,–y,–z) nos da la misma ecuación.

El concepto de simetría central hace referencia a orden, equilibrio y a que hay un único punto que coordina a todos los demás. Es por ello que muchas veces se utiliza para simbolizar el origen de la vida, el centro de gravedad o depositario de la energía, quién es el dueño de un conjunto de cosas, etc. Ejemplos de estas connotaciones los puedes encontrar en muchos símbolos religiosos.



24. Eistüte (*Cucurucho*)

$$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2(z^2 + 1)$$

Seccionar para investigar...

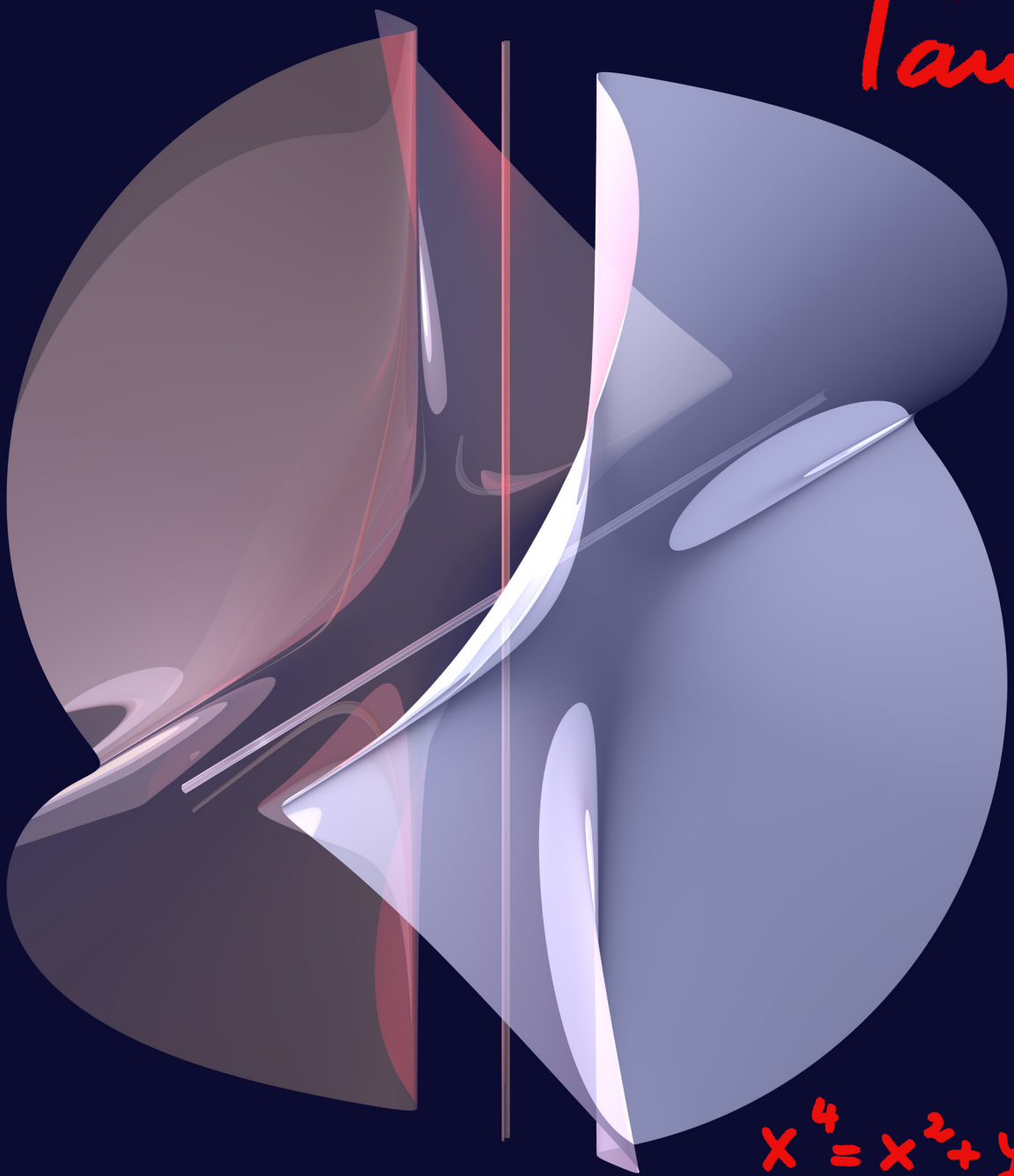
Cortes desveladores

Cuando queremos investigar un objeto, a menudo lo cortamos por la mitad. Una manzana entera tiene una forma redonda y un color rojizo, verde o amarillo, pero si queremos saber qué forma tienen sus semillas y de qué color es por dentro, tendremos que cortarla para descubrir su interior.

Si quieres estudiar una figura también la puedes cortar y observar qué información aportan las curvas que obtienes. Por ejemplo, al cortar una esfera por cualquier plano obtienes una circunferencia. Esta acción de "cortar" se denomina seccionar.

La misma técnica utilizan los médicos para hacer tomografías, seccionando el cerebro por planos paralelos.

Fíjate que la sección superior de Cucurucho es en forma de flor. Y dada su semejanza con un cucurucho, si pones una bola de helado encima de ella, ¿cómo puedes saber si el helado derretido lo atravesará y caerán gotas por abajo? Seccionando...


Tanz
$x^4 = x^2 + y^2 z^2$

25. Tanz (*Danza*)

$$x^4 - x^2 - y^2z^2 = 0$$

Recta que te quiero recta

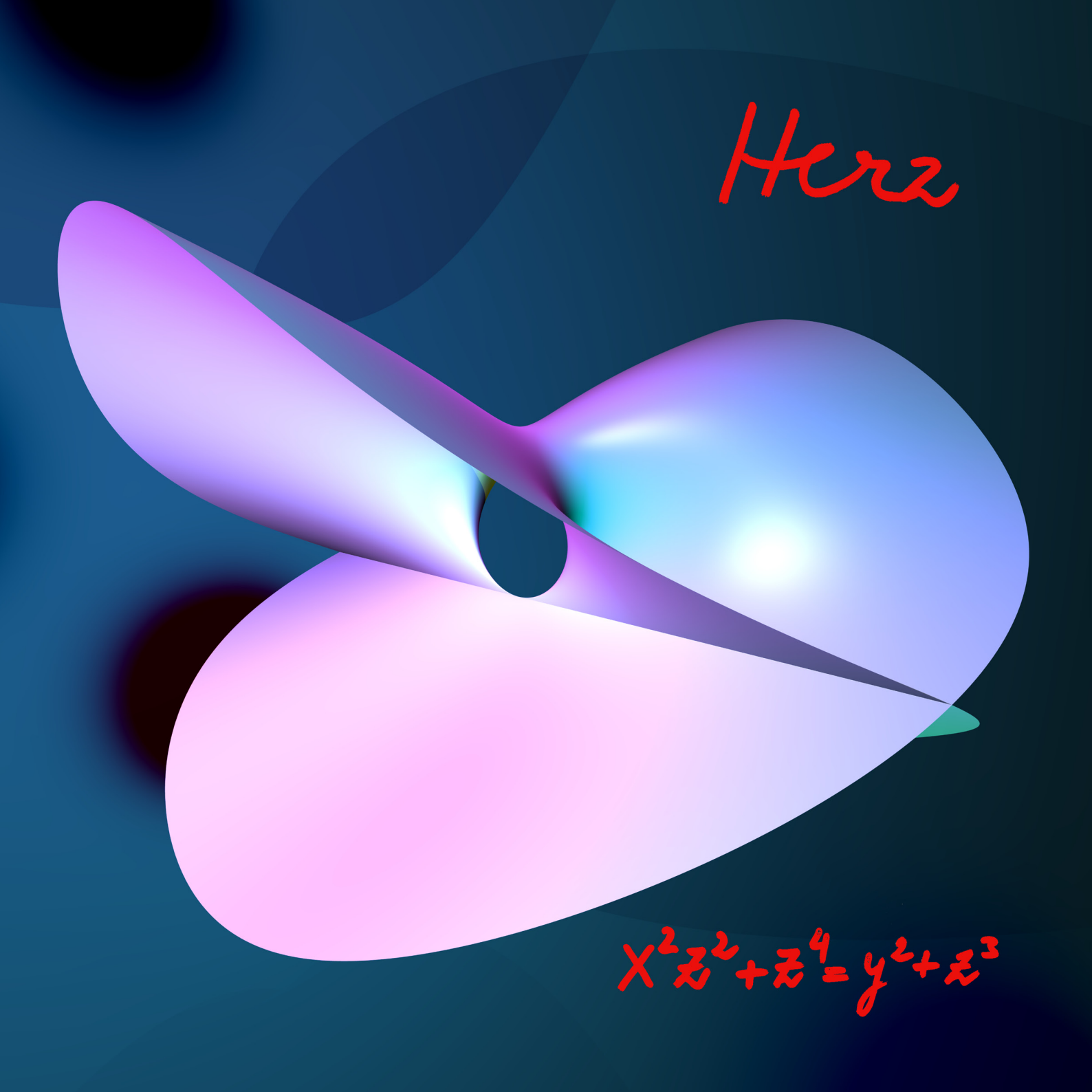
Superficies regladas

Las superficies regladas son las que se pueden generar mediante el movimiento de una recta que sigue un recorrido determinado.

Aunque Danza no es reglada, contiene rectas. Fíjate en dos de ellas que aparecen en la figura aisladas del resto: los ejes y, z. El programa SURFER no permite visualizar rectas o curvas aisladas. Para ver la curva dada por $f=0$ y $g=0$, se considera la ecuación $f^2+g^2=0$, que tiene las mismas soluciones reales, y se engorda a un fino tubo modificando un poco la ecuación, $f^2 + g^2 - a = 0$, para un valor pequeño de a.

Muchos arquitectos e ingenieros deciden trabajar con superficies regladas, no solamente por su diseño, sino también por las ventajas de su construcción: proporcionan rigidez y facilitan el uso del hormigón.

> Para que un objeto sea altamente bello es preciso que su forma no tenga nada de superfluo, solamente las condiciones materiales que lo hacen útil; se debe tener en cuenta el material de que se dispone y los usos que debe prestar; y de aquí nacerá la forma general. Cuando las formas son más perfectas exigen menos ornamentación.
>
> Antoni Gaudí


Herz
$x^2z^2+z^4=y^2+z^3$

26. Herz (*Corazón*)

$$y^2 + z^3 - z^4 - x^2z^2 = 0$$

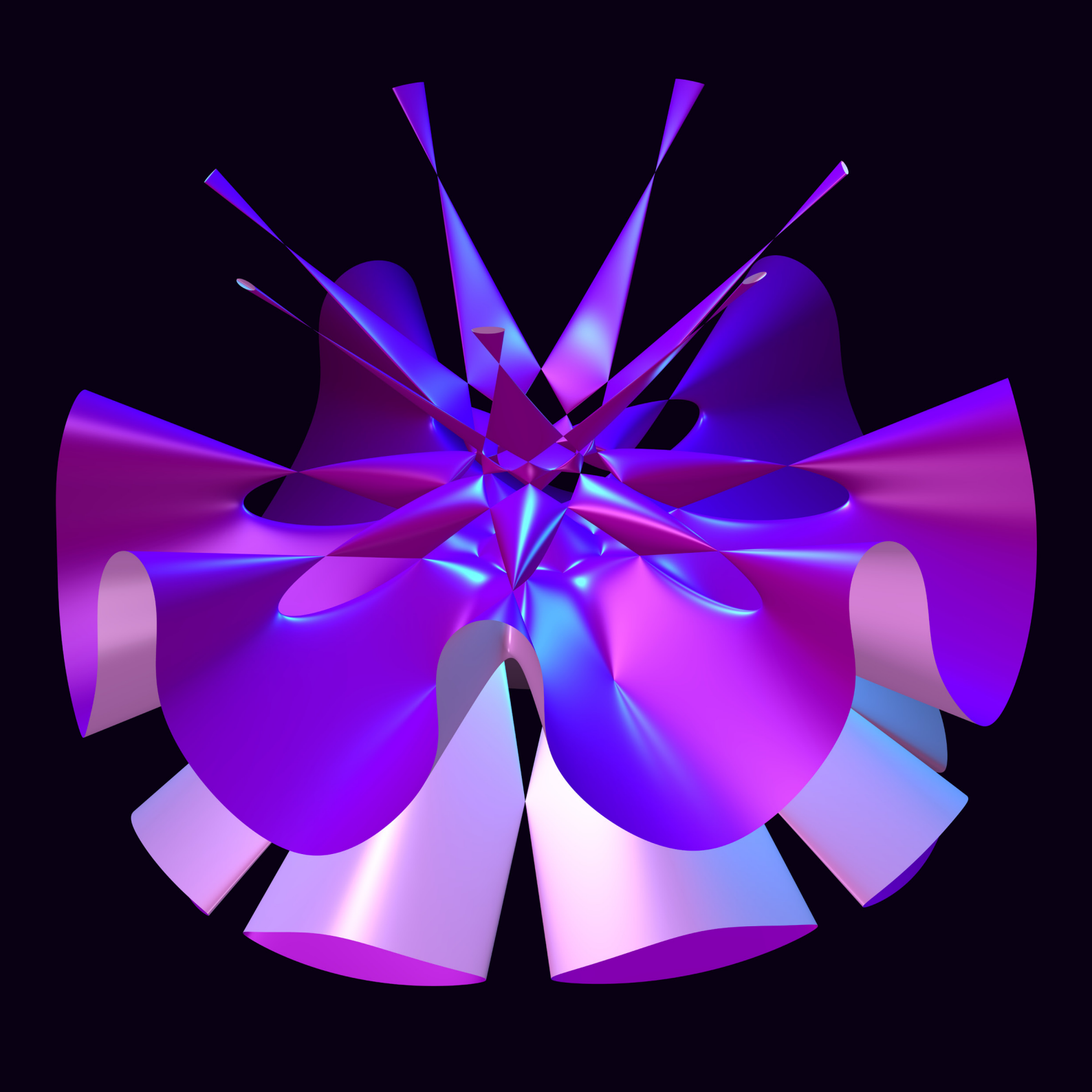
Mirar los árboles sin dejar de ver el bosque

Estudio local y global de las superficies

¿Has visto el pingüino y el tulipán que algunos visitantes como tú han dibujado con SURFER? Para conseguirlo, han tenido que multiplicar varias ecuaciones, ya que determinar todos los detalles de una superficie algebraica con solo una ecuación, como en Corazón, es muy difícil. La unión de lo "local", el detalle, de todos los puntos forma lo "global", la forma, de la superficie.

Aspectos globales de una superficie son por ejemplo su grado, el tipo de curvas de sus secciones, o saber como está construida. Este es el caso del Teorema Egregium de Gauss, que afirma que no se puede construir una esfera con una hoja de papel sin tener que arrugarla o rasgarla.

En cambio, aspectos locales de una superficie son por ejemplo saber si hay una singularidad en un punto o si el contacto de una superficie con otra alrededor de un punto es intenso o más bien superficial.



27. La séptica de Labs

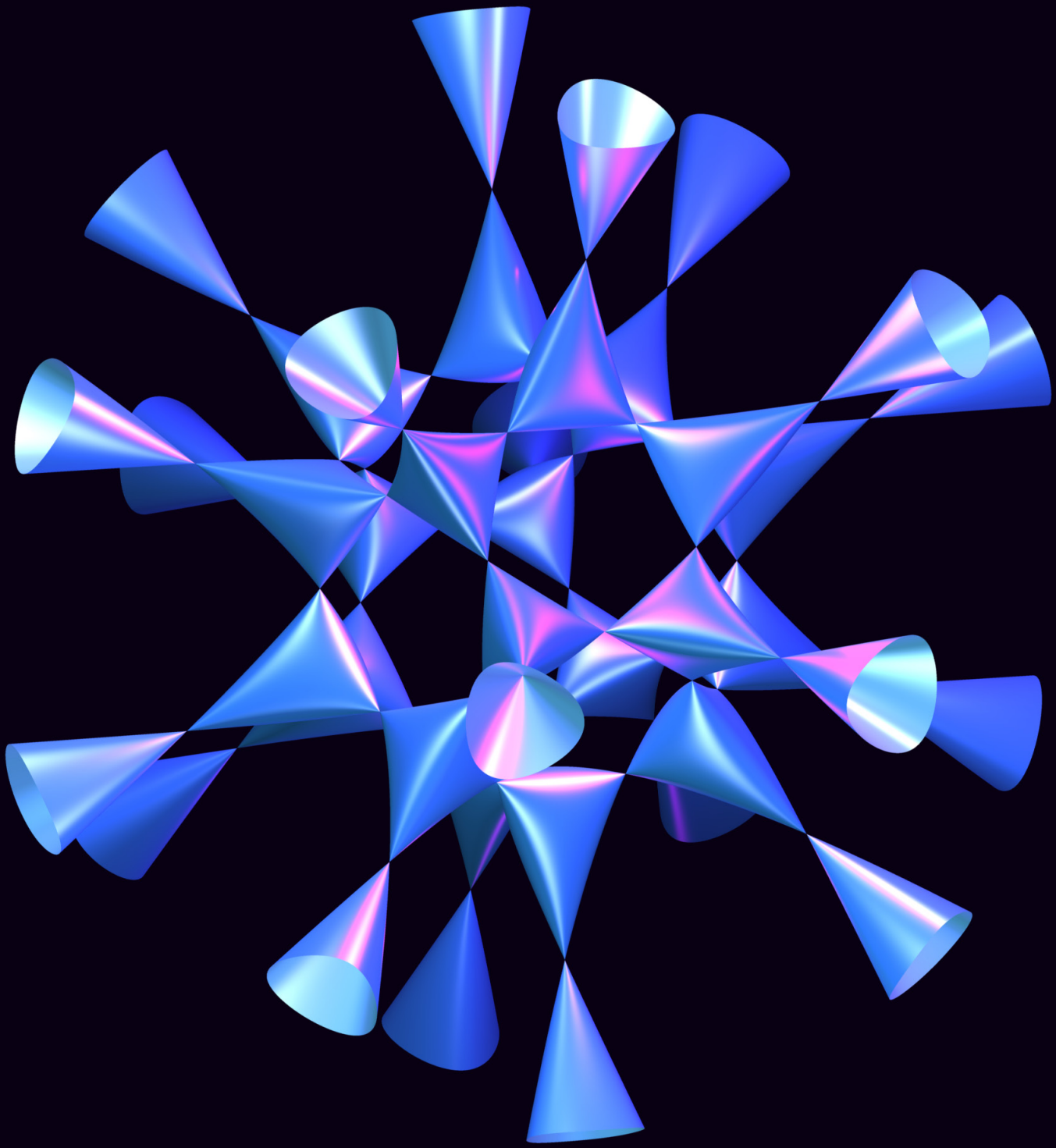
Las Matemáticas son retos

Problema abierto

¿Te imaginas cuál es el máximo número de singularidades que puede llegar a tener una superficie? Dependiendo del grado de la ecuación el número máximo de singularidades que se puede alcanzar es diferente.

Esta figura, "La Séptica de Labs", fue construida en 2004 por Oliver Labs. Tiene grado siete y es importante porque su número de singularidades, 99, es el más cercano al máximo posible conocido hasta hoy.

En efecto, en 1982 A. N. Varchenko demostró que no se pueden obtener superficies de grado siete con más de 104 singularidades y, hasta ahora, nadie ha llegado más lejos que Labs. Por eso la construcción de sépticas con 100, 101, 102, 103 o 104 singularidades continúa siendo un problema abierto.



28. Séxtica de Barth

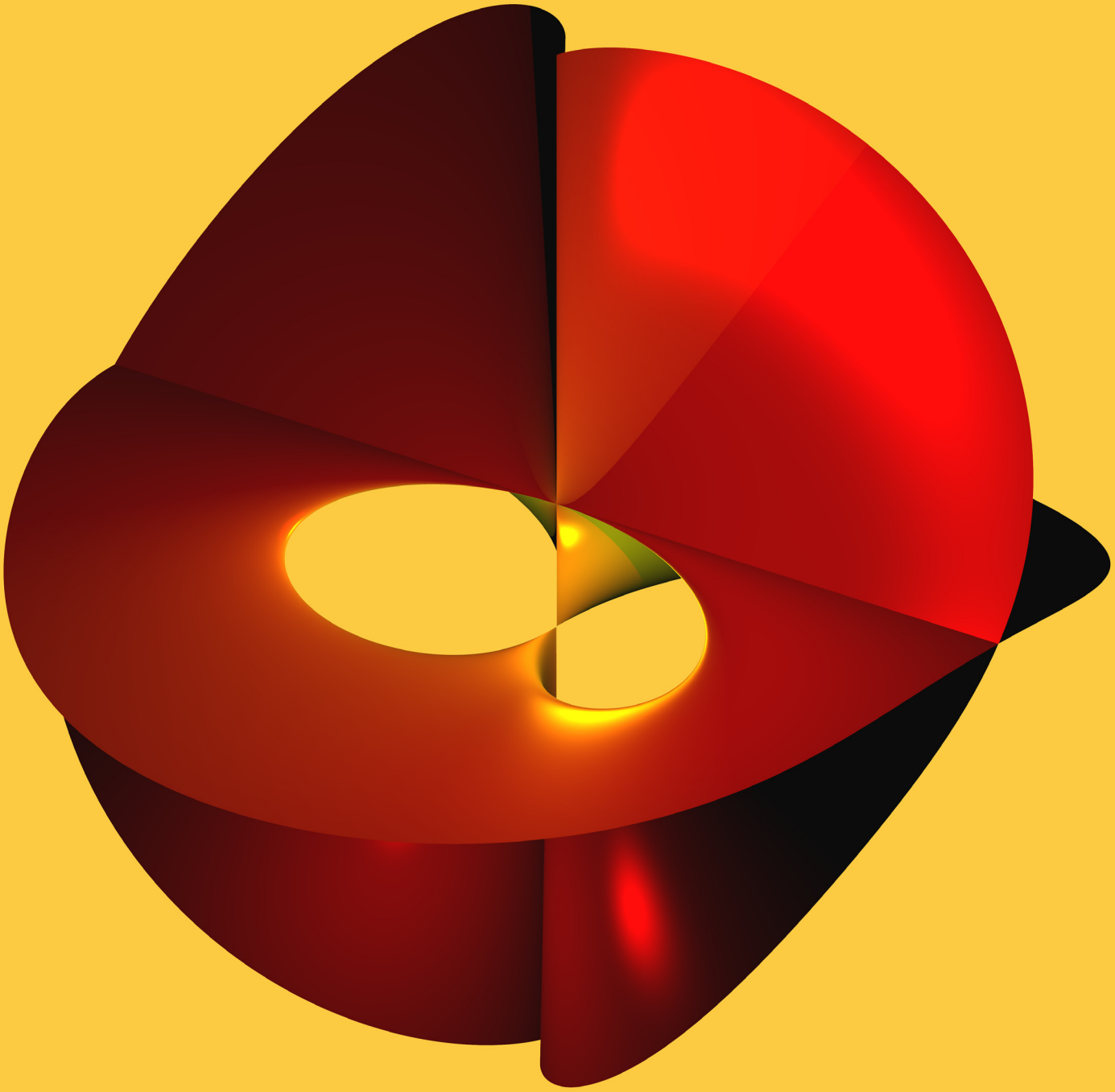
Los Guiness de las singularidades

Récord por sorpresa

La séxtica de Barth es una superficie de grado seis construida en 1996 por Wolf Barth. Es remarcable porque contiene el máximo número de singularidades que pueden aparecer en un polinomio de grado seis, 65. ¡Pero esto no se demostró hasta 1997! Para muchos geómetras esto significó una gran sorpresa, puesto que ellos pensaban que el máximo era 64.

Existen diferentes familias de superficies con la propiedad de ser un polinomio de grado seis y tener 65 singularidades. Pero la séxtica de Barth destaca por su simetría en forma de icosaedro.

La forma de la séxtica de Barth recuerda a la de una molécula llamada fulereno. Dicha molécula es la tercera forma más estable del carbono, junto al grafito y al diamante, y se llama así en memoria de Buckminster Fuller, el primer matemático-arquitecto en "imaginarse" esta forma.



29. Miau

$$x^2yz + x^2z^2 + 2y^3z + 3y^3 = 0$$

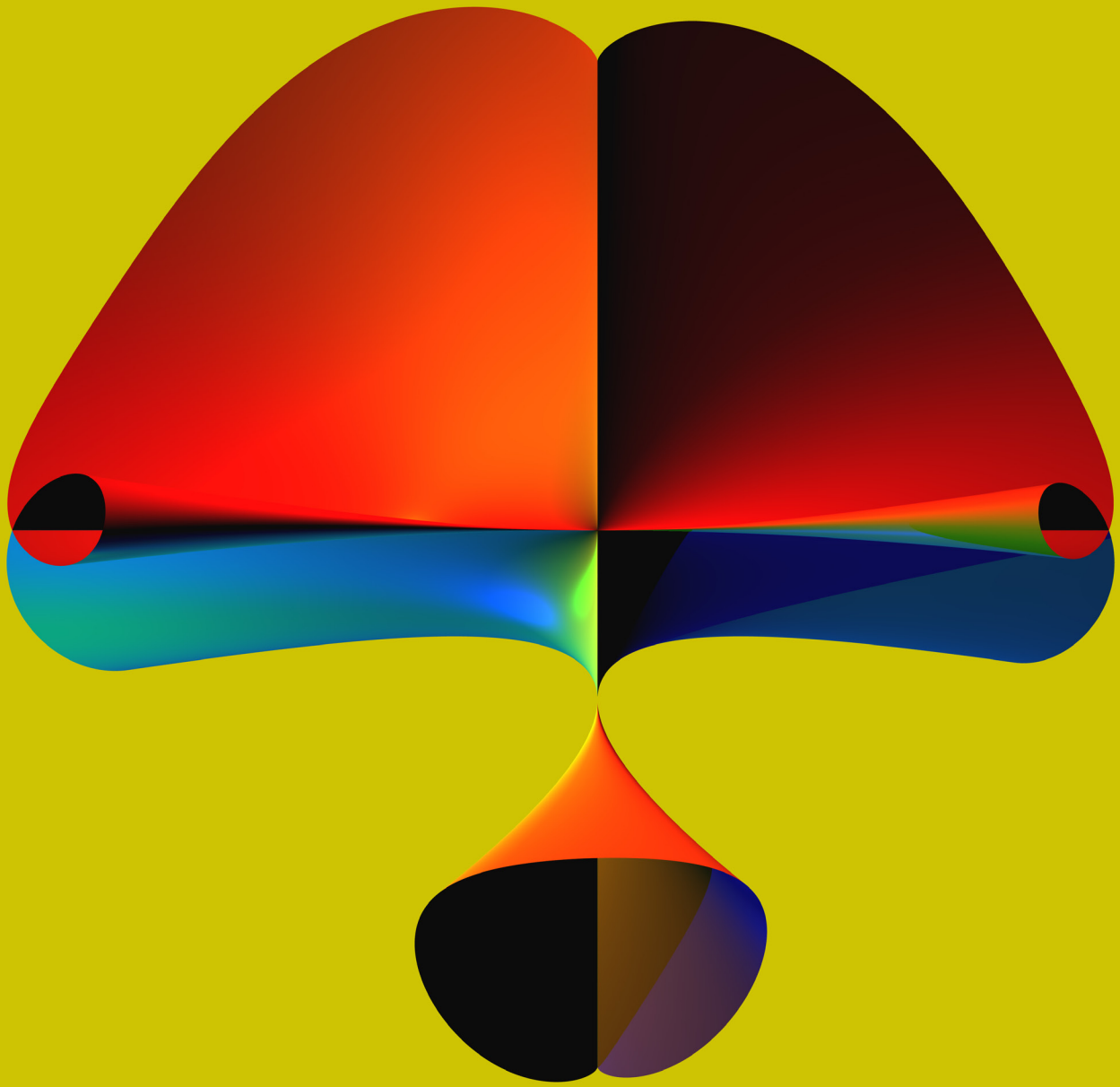
Tantas superficies como agujeros

Están vacíos pero son importantes

En Miau hay un enorme agujero doble en el centro, a través del cual vemos una de sus singularidades. Puede parecer que los agujeros, al estar vacíos, no tienen ninguna importancia, pero de hecho nos ayudan a conocer mejor la superficie.

En el caso de superficies lisas acotadas y de una sola pieza, el número de agujeros, como el del donut, incluso las clasifica. Esto es así en el ámbito de la Topología, donde se permite deformar elásticamente la superficie, pero no rasgarla, pegarla o estrangularla. Así, ¡la superficie de una taza de café es la misma que la de una rosquilla!

Los agujeros también tienen no menos importancia en otras ocasiones. Según hayan o no burbujas –agujeros– en la cámara magmática de un volcán, su erupción podrá ser explosiva o solo efusiva. Lo mismo ocurre con las burbujas de gas que liberan las bacterias de la fermentación del queso Emmental: acaban produciendo un queso lleno de agujeros.



30. Geisha

$$x^2yz + x^2z^2 = y^3z + y^3$$

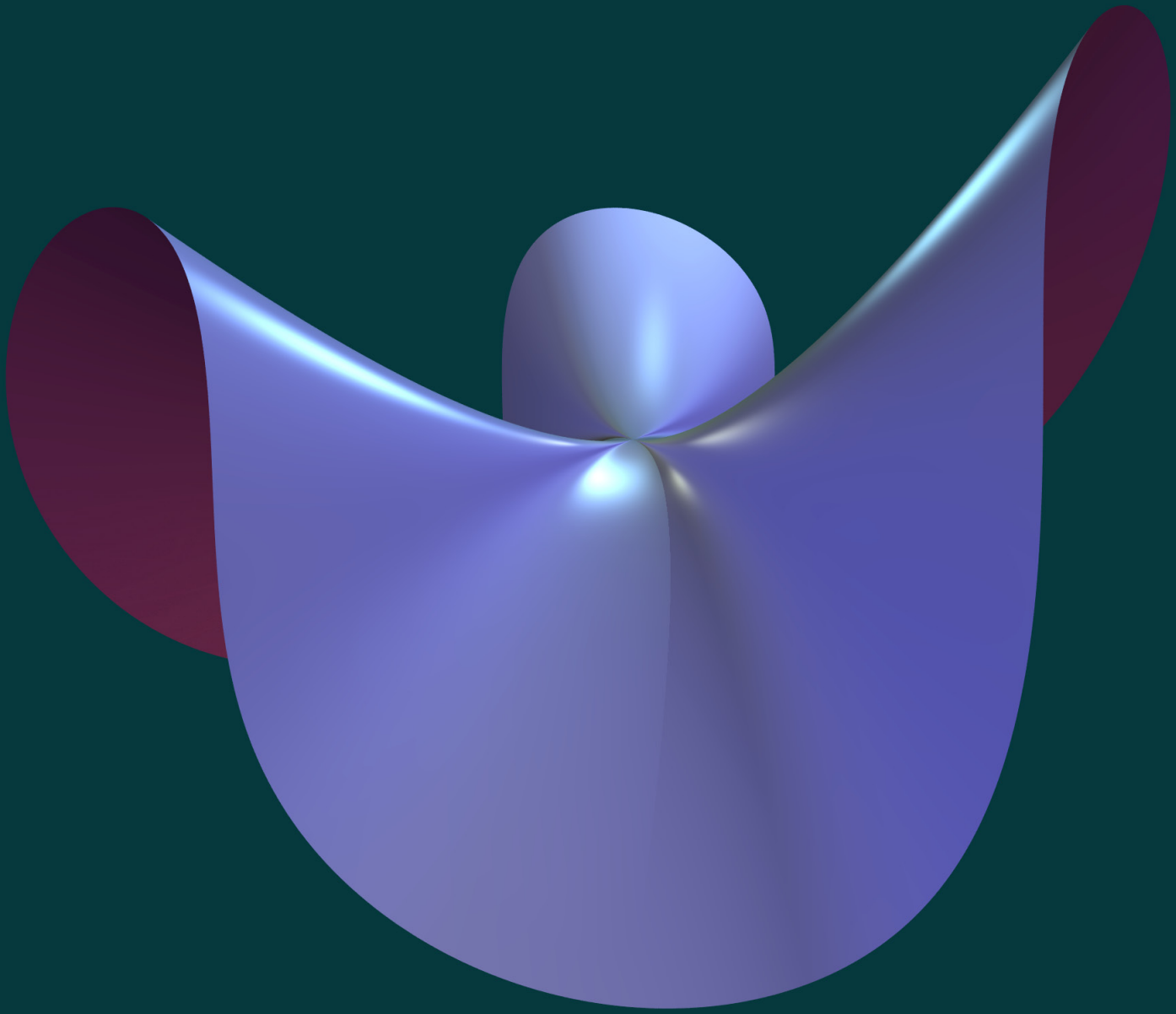
Transforma tu imaginación en ecuaciones

Arte matemático

Muchas veces no es fácil descubrir las simetrías, proporciones, razones áureas... que se esconden tras una obra de arte. Sin embargo existen corrientes matemáticas que buscan el arte *de* las Matemáticas, y no el arte *con* las Matemáticas.

Un ejemplo de ello es el "Arte Matemático", donde los autores utilizan las Matemáticas en sus obras como un medio mismo, sin dar pie a la casualidad, y muchas veces ¡juegan con paradojas imposibles como Maurits C. Escher. Otro artista destacado es Jared Tarbell. ¿Sabías que sus obras se realizan mediante clicks con el ratón, y está basado en ecuaciones y logaritmos?

Y recuerda, tú tienes la última palabra para decidir si una obra te parece hermosa. Si, como hacíamos referencia al principio de la exposición, cada persona reconoce objetos diferentes al ver la misma forma, todavía es más subjetivo reconocer la belleza en lo que observamos.



31. Schneeflocke (*Copo de nieve*)

$$x^3 + y^2 z^3 + y z^4 = 0$$

Las ecuaciones pueden ser bellas

Buscar la misma belleza de diferentes maneras

Seguramente, cuando más ganas tenemos de dibujar es cuando hemos visto algo que nos parece hermoso. A veces es difícil que el dibujo nos deje satisfechos, porque ya no es tan hermoso como aquello que hemos visto. ¡Y es que la belleza sabe ocultarse muy bien!

En Matemáticas, a nuestra manera, también buscamos la belleza allí donde se esconde. Y resulta que uno de esos lugares son las ecuaciones. A veces para encontrar una ecuación que produzca una superficie hermosa hay que buscar mucho, ensayando con ecuaciones parecidas, y entendiendo qué efecto tiene cada parte de la ecuación en el dibujo.

Esto ocurre también con los fotógrafos que hacen miles de capturas antes de tener un buen enfoque, y con los pintores, que a veces llenan un museo con ensayos antes de empezar el cuadro definitivo. Pintores, fotógrafos, matemáticos... todos hacen lo mismo de diferentes maneras.



LA GEOMETRÍA DE LAS SUPERFICIES “SUAVES”

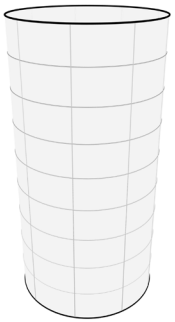
Superficies regulares

Una superficie es un objeto geométrico de dimensión 2 (con dos grados de libertad). Puede pensarse en ella como un elemento plano al que se deforma para dotarle de una determinada configuración. Algunos ejemplos son el plano, el cilindro, la esfera, el toro (así se llama en matemáticas a la superficie del flotador), el elipsoide (el balón de rugby),… Estos ejemplos son superficies "suaves" (en matemáticas, regulares), en particular, sin bordes, ni picos.

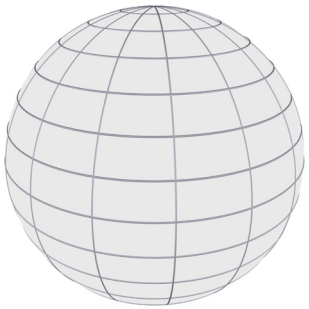
La Geometría Diferencial es la rama de las matemáticas que estudia las superficies regulares (y también los espacios geométricos de cualquier dimensión), y aplica dicho estudio en otras partes de las matemáticas y en otras ciencias. Sus herramientas básicas son el cálculo diferencial e integral, el álgebra lineal y, por supuesto, la geometría.

Groucho: ¿Cuál es la forma de la Tierra?
Harpo: Pues no lo sé.
Groucho: Bien, veamos, ¿cuál es la forma de mis gemelos?
Harpo: Cuadrada.
Groucho: No los gemelos de diario, sino los que yo visto los domingos.
Harpo: Ah, redonda.
Groucho: Muy bien, ¿cuál es la forma de la Tierra?
Harpo: Cuadrada entre semana y redonda los domingos.

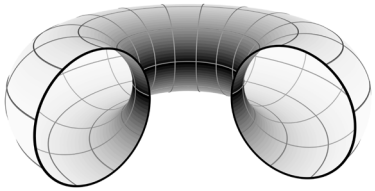
Los Hermanos Marx , "Fun in High Skule" (1910)



Cilindro



Esfera



Toro

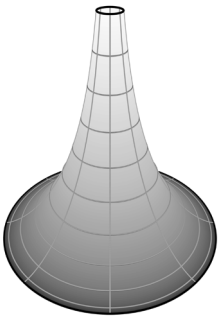
La curvatura

Un elemento importante en el estudio de las superficies regulares es la curvatura, es decir, la forma en que las superficies se curvan en el espacio.

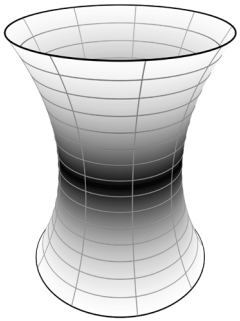
En el siglo XIX, los matemáticos descubrieron que podían definirse dos curvaturas, que conjuntamente medían cómo se comban las superficies, las conocidas como "curvatura de Gauss" K y "curvatura media" H. El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demostró que la curvatura que lleva su nombre mide la curvatura intrínseca de la superficie (es decir, la curvatura que un habitante de la misma puede percibir desde dentro, sin mirar al espacio exterior). Sin embargo, la curvatura media es extrínseca, ofrece una medida de la relación de la superficie con el espacio exterior.

Así la ondulación que percibimos al mirar a una superficie viene dada por ambas curvaturas. Por ejemplo, en una superficie de curvatura media nula, H=0, es consecuencia de su curvatura interna.

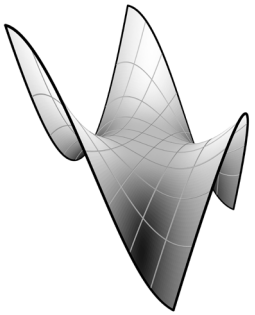
> *Después de eso, modestamente presenté la solución que habíamos encontrado para el sorprendente problema de que la suma de los tres ángulos de un triángulo en nuestro espacio superaba los* 180°*… si lo entiendo bien, nuestro espacio es curvado, curvado del todo,… una superficie esférica de dos dimensiones.*
>
> Dionys Burger, *Esferalandia* (1965).



Seudoesfera



Catenoide



Silla de montar

Superficies no orientables

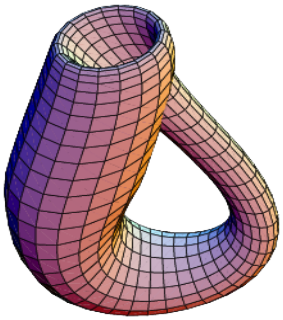
De forma intuitiva, la orientabilidad de una superficie puede verse en función de que esta tenga una o dos caras.

Si se pegan los extremos de una cinta alargada (por ejemplo de papel) se obtiene una banda normal. Es una superficie que tiene dos caras, la exterior y la interior, como la mayoría de las superficies, y por lo tanto es orientable.

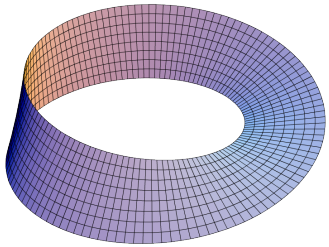
Sin embargo, si antes de pegar los extremos se da media vuelta a uno de ellos se obtiene una banda de Moebius (figura), que es una superficie no orientable (solamente tiene una cara) y no cerrada (que tiene borde). Para comprobar que solamente tiene una cara puede recorrerse la banda de papel con un lápiz, y cuando se regrese al punto inicial se comprobará que se ha recorrido la banda entera.

Dos ejemplos de superficies no orientables cerradas (sin borde) son el plano proyectivo y la botella de Klein (la figura es una representación de esta superficie en en espacio tridimensional).

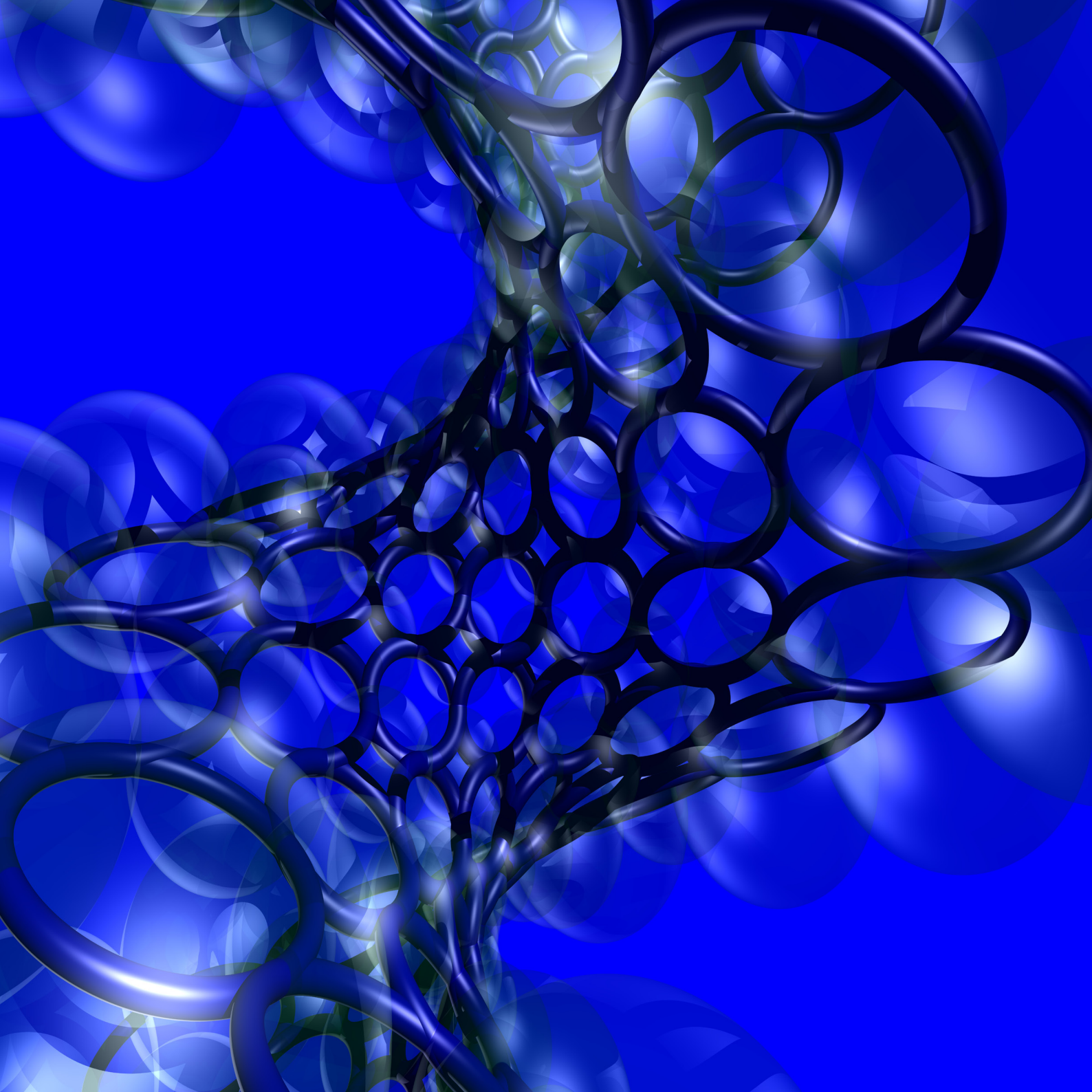
> *Deseoso de captar su atención, me había propuesto levantar en dos tiempos una barra equivalente en peso a un par de Steinways cuando de pronto mi columna vertebral adoptó la forma de una banda de Moebius, y buena parte de mi cartílago se separó audiblemente.*
>
> Woody Allen, Pura Anarquía (2007)



Botella de Klein



Banda de Moebius

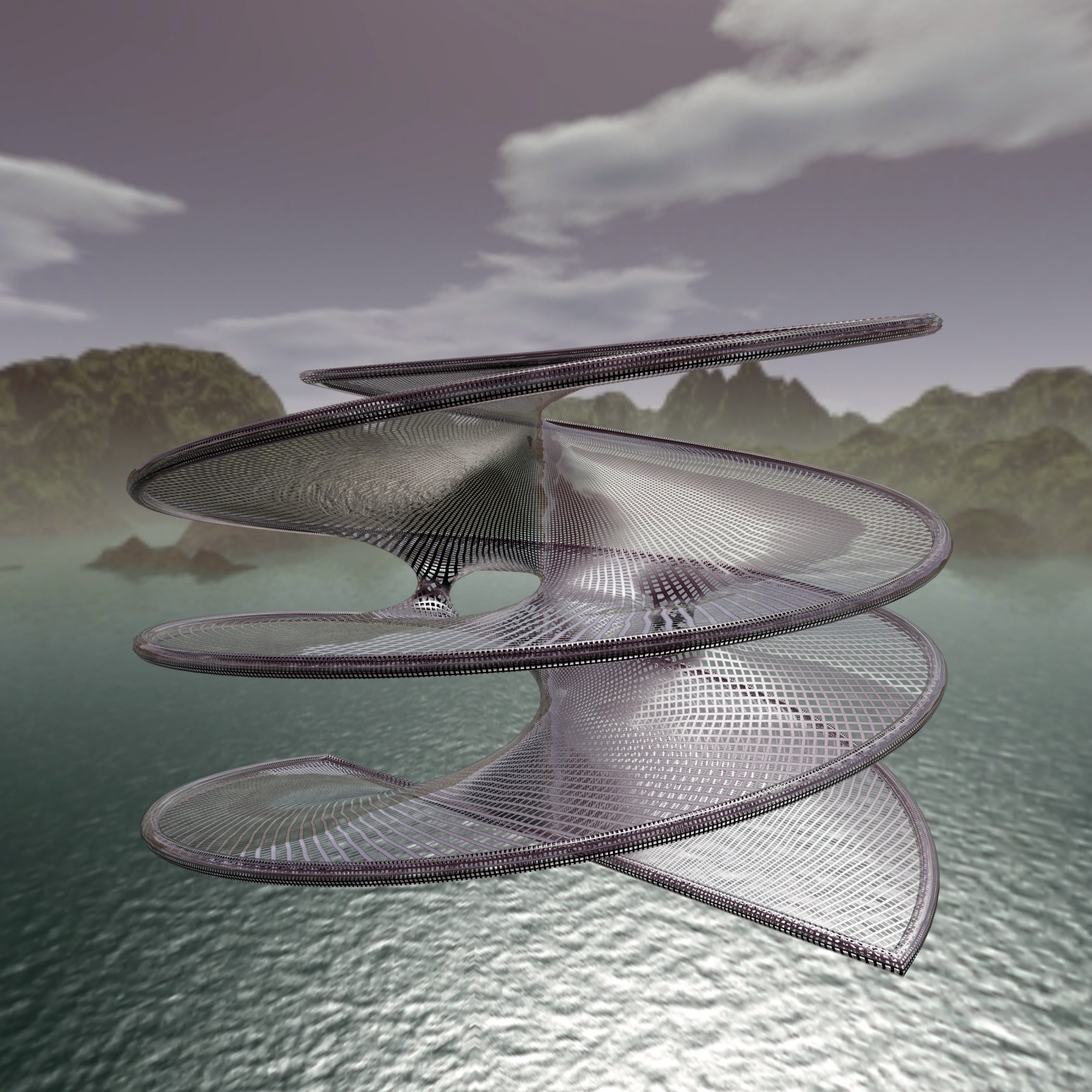


32. Superficies minimales

Películas de jabón

Si se introduce un alambre alabeado cerrado en un líquido jabonoso, al sacarlo se obtiene una película. Debido a la tensión superficial del líquido, esta película es una superficie en equilibrio, lo que además implica que es una superficie de área mínima, entre las que tienen el mismo borde (el alambre). Geométricamente, esta propiedad es equivalente a que la curvatura media H sea nula. A las superficies con esta propiedad se las llama *superficies minimales*.

Primeros ejemplos: el helicoide (escalera de caracol) y el catenoide (superficie de revolución de la catenaria). Además, éstas pueden ser deformadas una en la otra a través de una familia de superficies que siguen siendo minimales. En esta imagen (del matemático Tim Hoffman) se muestra la discretización de una superficie minimal intermedia de dicha familia. La representación o el dibujo de superficies "suaves" utilizando círculos o discos planos (discretización) es una herramienta potente en visualización, arquitectura y diseño.



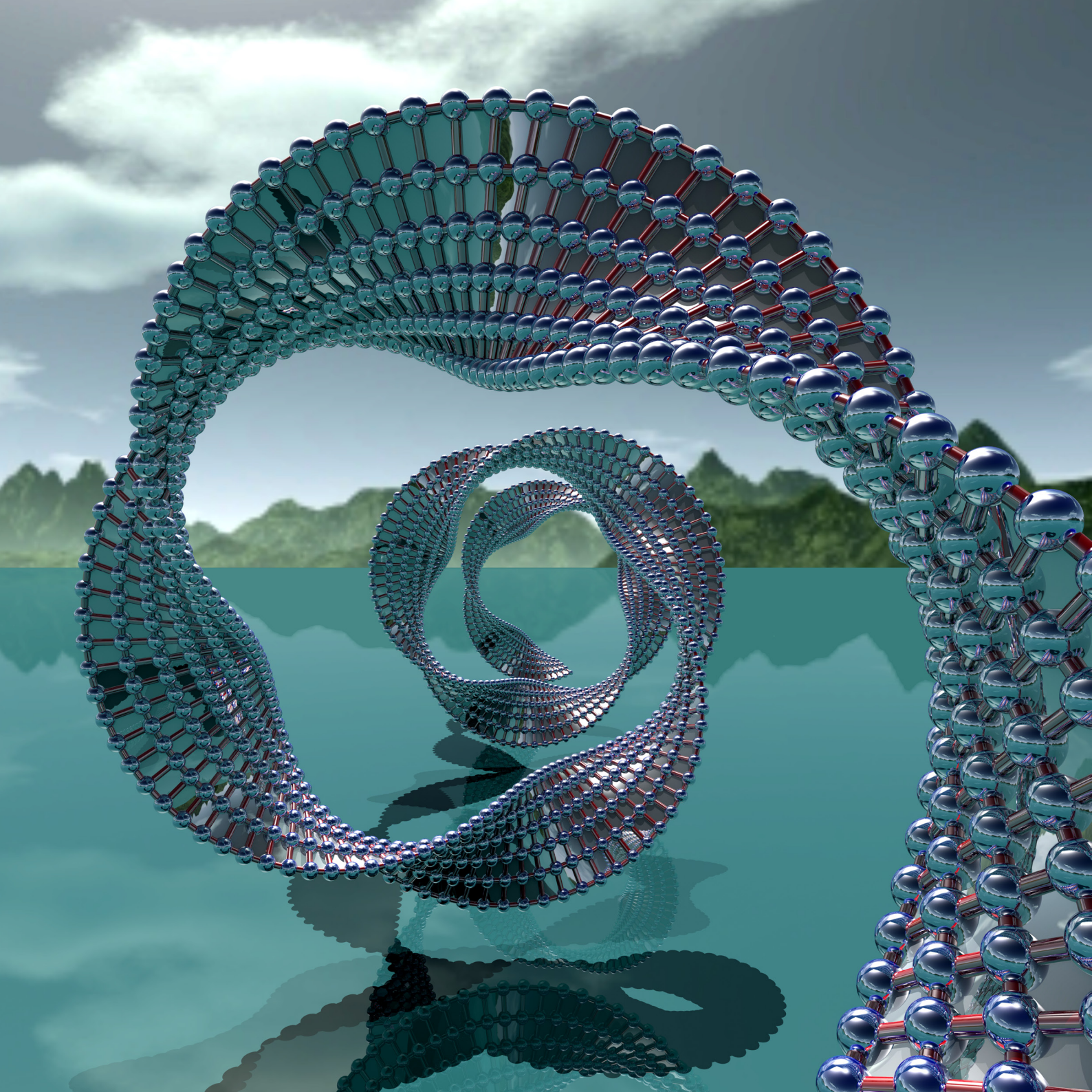
33. Helicoide

... con asas

El helicoide es la superficie formada por las infinitas rectas que unen los puntos de una hélice circular con los de su eje central y son perpendiculares a este eje.

Es muy habitual en nuestra vida: escaleras de caracol, tuercas, tornillos, móviles de viento o los "tornillos de Arquímedes". Este mecanismo, formado por un helicoide que gira dentro de un cilindro, ha sido utilizado desde la antigüedad para diseñar máquinas destinadas al desplazamiento de líquidos (subir agua a un nivel más alto) y sólidos (arena, harina, cereales o cremas). Esta forma se ha usado profusamente en arquitectura.

Puede obtenerse como una película jabonosa con un alambre formado por una hélice cerrada al unirla a su eje. Esta imagen, diseño de Ulrich Pinkall, muestra un helicoide en el que se ha conseguido conectar los diferentes niveles del mismo sin romper la minimalidad de la superficie, ni provocar que la nueva superficie se corte a sí misma. La pieza de conexión se denomina, en matemáticas, "asa" y dependiendo de dónde se encuentra parecerá un agujero en el suelo o en el techo, o una columna que conecta los distintos niveles.



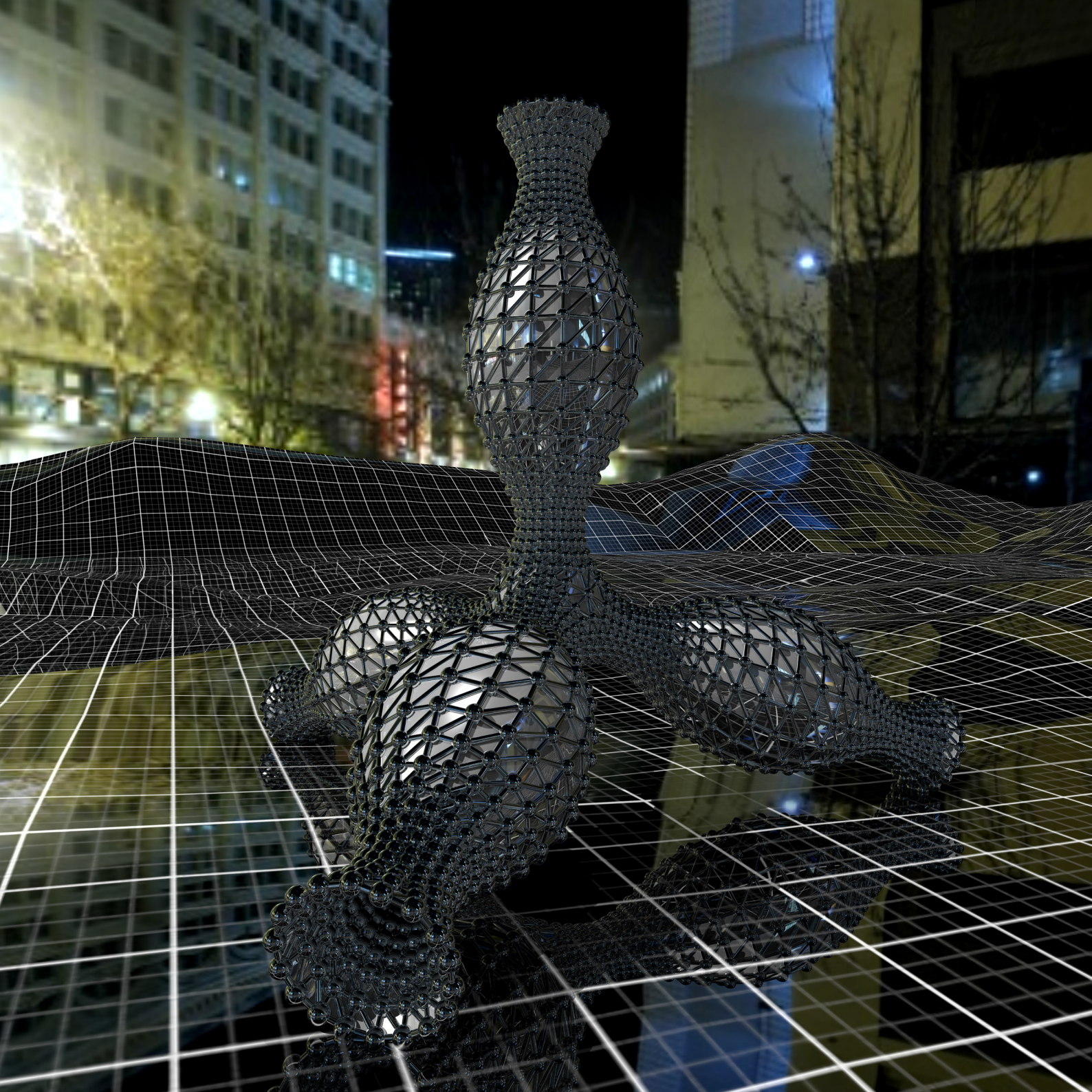
34. Superficie de Björling

Explorando nuevos territorios

Las superficies minimales son un modelo geométrico para las películas de jabón y se caracterizan por tener curvatura media H nula en todo punto de la superficie. Esta familia de superficies es un campo activo de investigación dentro de la Geometría Diferencial, con muchas aplicaciones industriales y tecnológicas, e incluso artísticas.

Un problema abierto es la construcción de nuevos ejemplos de superficies minimales, así como la obtención de nuevas técnicas para generarlos. En 1844 el matemático sueco E. G. Björling demostró que para cada curva alabeada espacial, suficientemente buena, podría construirse una banda de superficie minimal alrededor de la curva.

La superficie mostrada aquí (diseño de Ulrich Pinkall haciendo uso del programa ¡Reality, a partir de las fórmulas matemáticas de Mathias Weber) es una superficie minimal de Björling generada a partir de una hélice.



35. Tetranoide

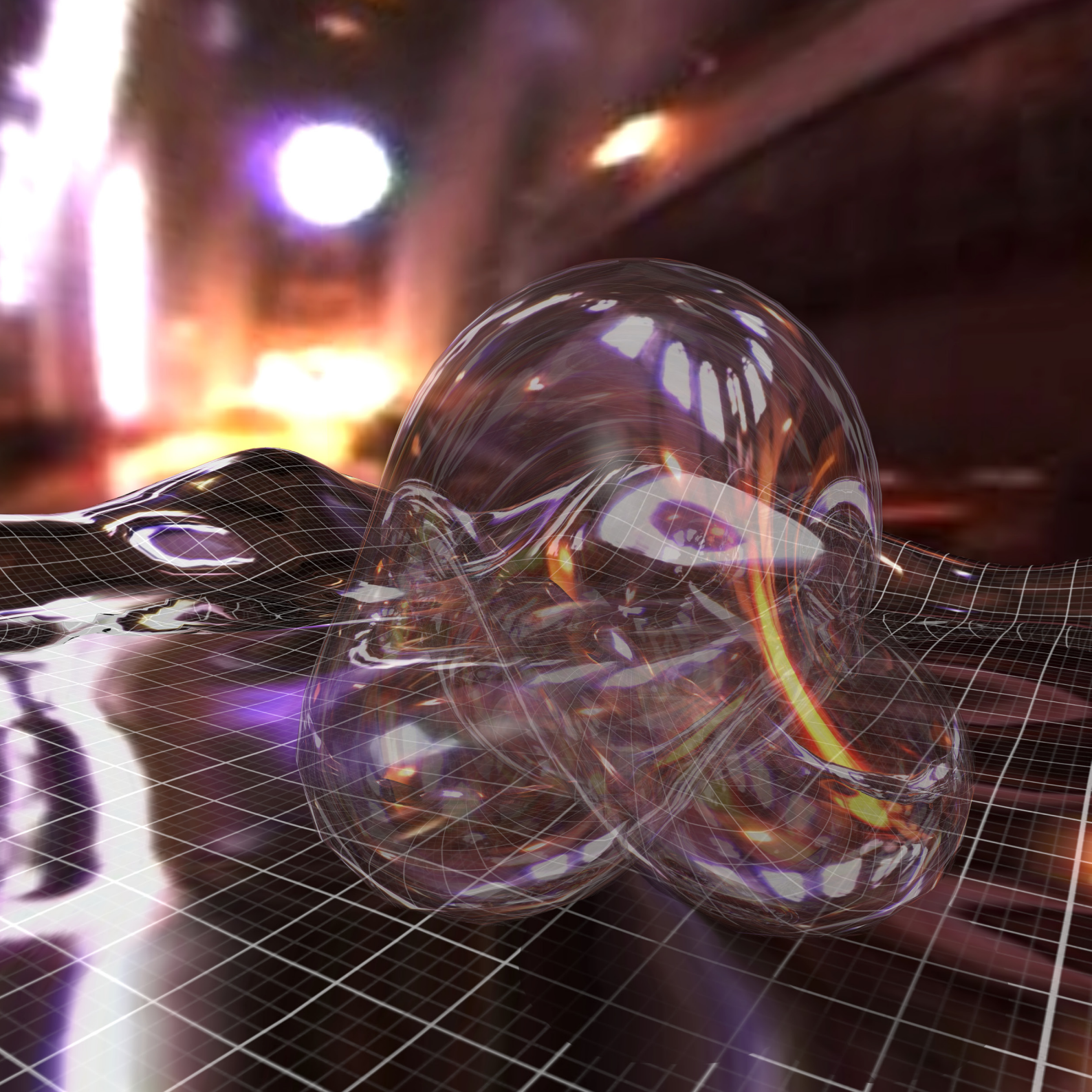
Pompas de jabón

El tetranoide pertenece a la familia de las superficies con curvatura media H constante, que son el modelo geométrico de las pompas de jabón. Al igual que las superficies minimales, son superficies en posición de equilibrio, pero ahora la presión a ambos lados no es necesariamente igual (por ejemplo, una gota de aceite en agua). De la misma manera, estas superficies son de área mínima, pero entre "las que encierran un mismo volumen".

El ejemplo por antonomasia de superficie con curvatura media constante es la esfera (la forma estable de la pompa de jabón). Otro ejemplo es la superficie de una gota de líquido sobre una superficie plana, que en equilibrio tendrá curvatura media constante.

El estudio de estas superficies (minimales y de curvatura media constante) es importante en campos en los que se produzca contacto entre dos medios (en microbiología, mezcla o separación de sustancias, prospecciones petrolíferas,...)

El tetranoide es un nuevo ejemplo de superficie de curvatura media constante, que ha sido construido para tener simetría basada en el tetraedro (la pirámide de base triangular).



36. Superficie de Boy

Sombras desde la 4D

El ejemplo por antonomasia de superficie no orientable cerrada (sin borde) es el llamado plano proyectivo. Este surge, con la geometría proyectiva, en el Renacimiento, en el estudio de la perspectiva en pintura, y puede pensarse como el espacio de todas las direcciones en las que los rayos paralelos de luz pueden crear sombras. El plano proyectivo es una superficie muy importante en matemáticas, pero difícil de imaginar, puesto que solamente se puede visualizar en la cuarta dimensión (4D).

La superficie de Boy es un modelo en nuestro espacio tridimensional del plano proyectivo, que se genera pegando, a través de sus bordes, un disco y una banda de Moebius. La Superficie de Boy se corta a si misma, pero es suave en cada uno de sus puntos. La versión que se muestra aquí se caracteriza por tener una curvatura media H lo más pequeña posible, es decir, “no tiene protuberancias innecesarias”, lo que realza su belleza.



Aurélien Alvarez, Étienne Ghys, Jos Leys

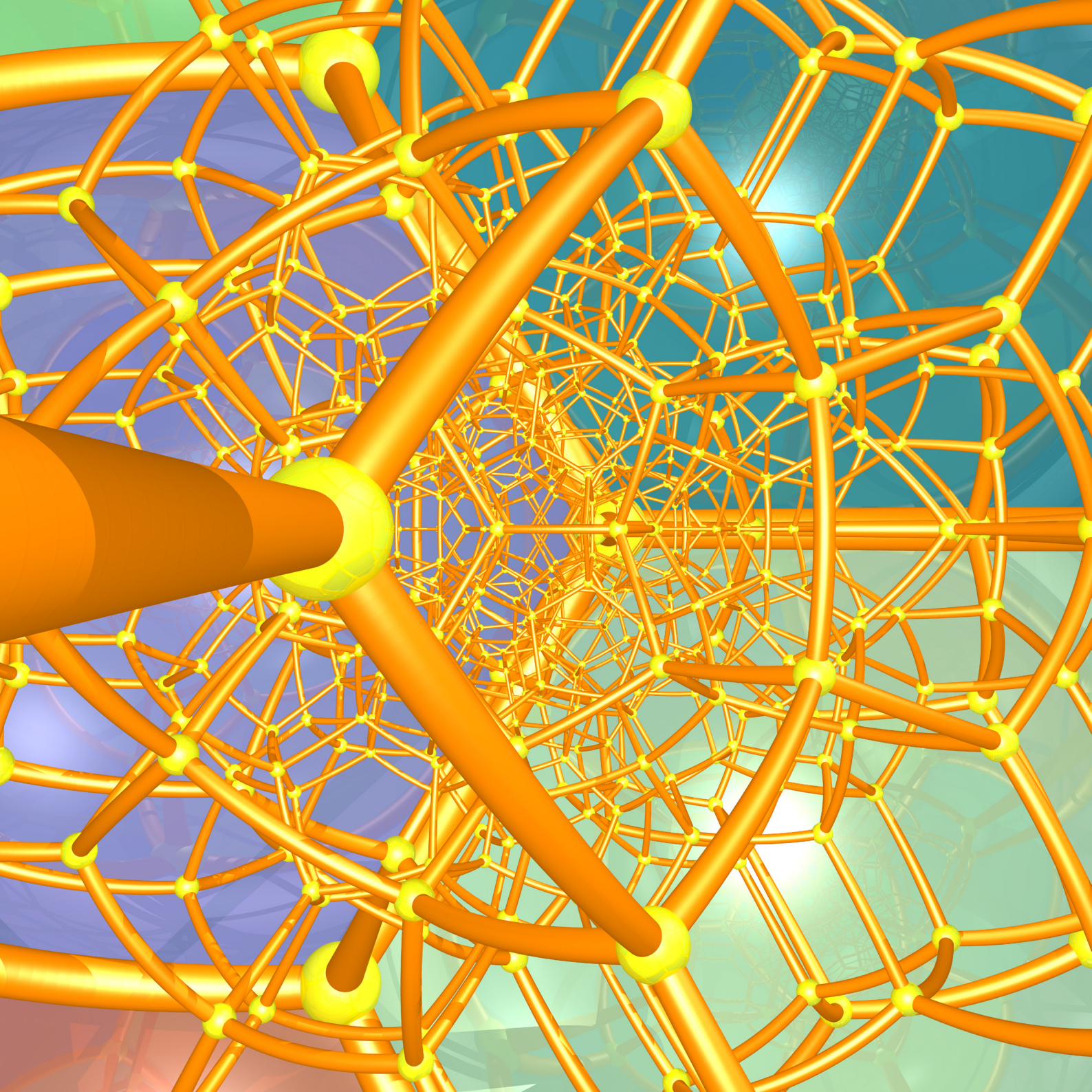
37. Proyección estereográfica

El arte de la cartografía

Durante siglos, cartógrafos y matemáticos han estado buscando la manera de proyectar la superficie terrestre sobre un plano para obtener mapas correctos. Es decir, mapas sobre los que poder medir correctamente la longitud de un río, la distancia entre dos ciudades, el alcance de un misil, la superficie de un bosque o el rumbo de viaje en navegación marítima o aérea.

Por desgracia, esto no es posible: la curvatura de Gauss K de la esfera es una constante positiva, la del plano es nula y sin embargo K debe preservarse por transformaciones "isométricas" (las que generan mapas correctos). Así, si se intenta aplanar la mitad de una pelota de goma, esta se deformará y rasgará, modificándose las distancias, la geometría interna de la esfera. En conclusión, todos los mapas son falaces en algún sentido.

La transformación mostrada en la imagen (una entre cientos de las existentes) es la proyección estereográfica que proyecta los puntos de la superficie terrestre desde el Polo Norte sobre un plano tangente al Polo Sur. Esta preserva los rumbos y transforma los meridianos en rectas que pasan por el Polo Sur y los paralelos en circunferencias concéntricas.

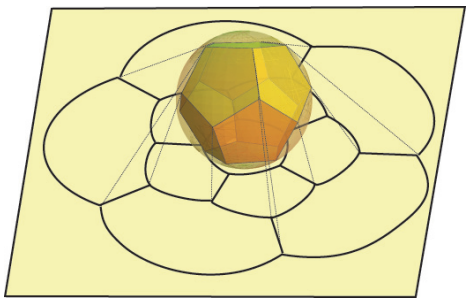


Aurélien Alvarez, Étienne Ghys, Jos Leys

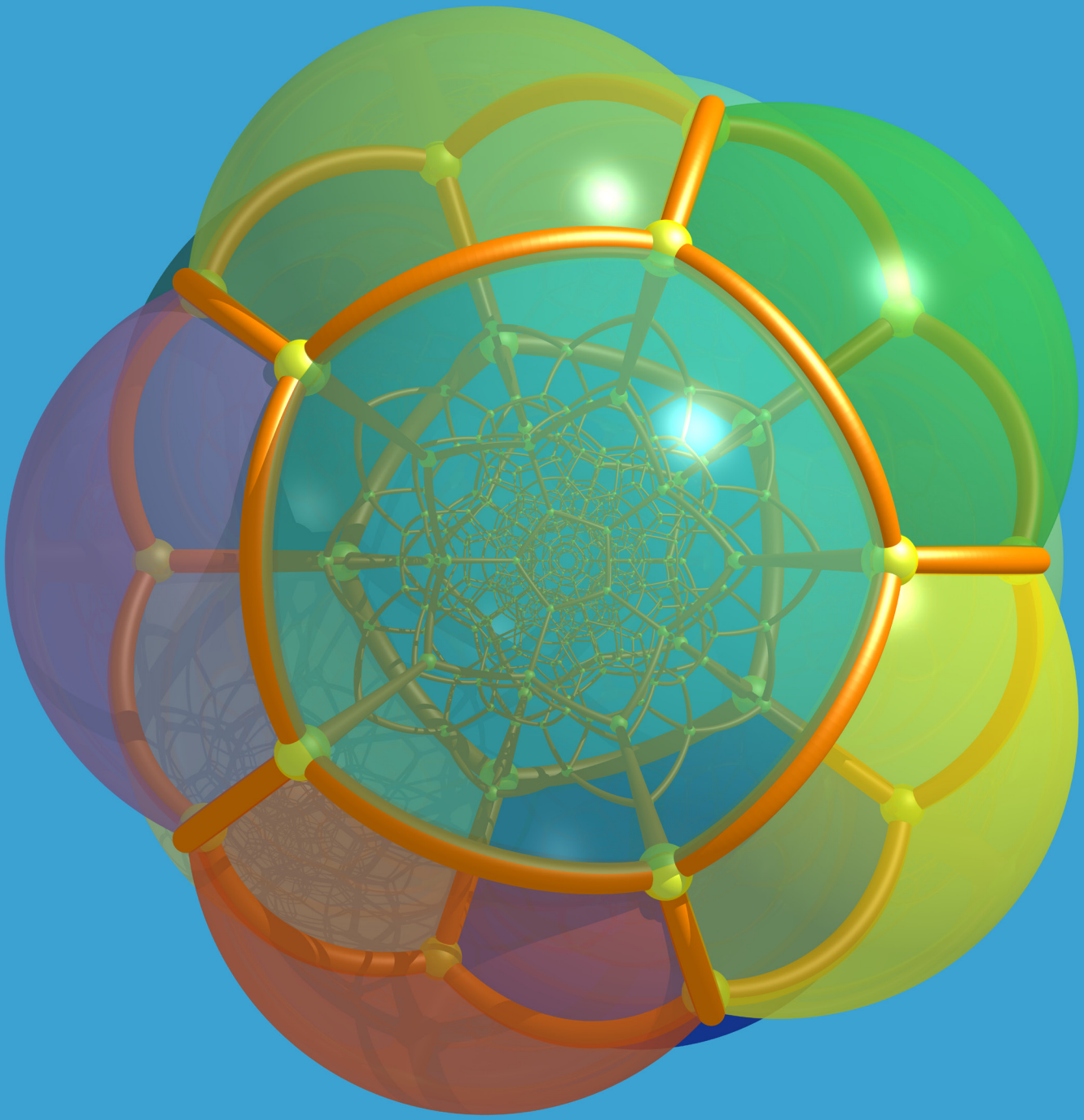
38. La 120 celda

4D en 3D

La 120-celda es un politopo regular en dimensión cuatro. La 120-celda está formada por 120 dodecaedros iguales adosados por sus caras (720 pentágonos). Tiene 600 vértices y 1200 lados. Este politopo es, en dimensión cuatro, el análogo al dodecaedro en dimensión tres, que tiene 12 pentágonos regulares iguales adosados por sus lados. Tiene 20 vértices y 30 lados. El dodecaedro lo podemos ver proyectado en la esfera S^2 (recordar un balón de futbol), o mediante proyección estereográfica en un plano, como en la figura.



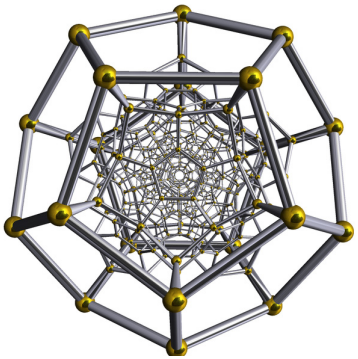
Las imágenes de este panel y del siguiente muestran distintos puntos de vista de la representación de la 120-celda (contenida en la esfera S^3) en el espacio tridimensional usual. Esta imagen es la de su proyección estereográfica. Se observa que los dodecaedros están curvados de manera que los pentágonos son trozos de esferas y las aristas trozos de circunferencias.

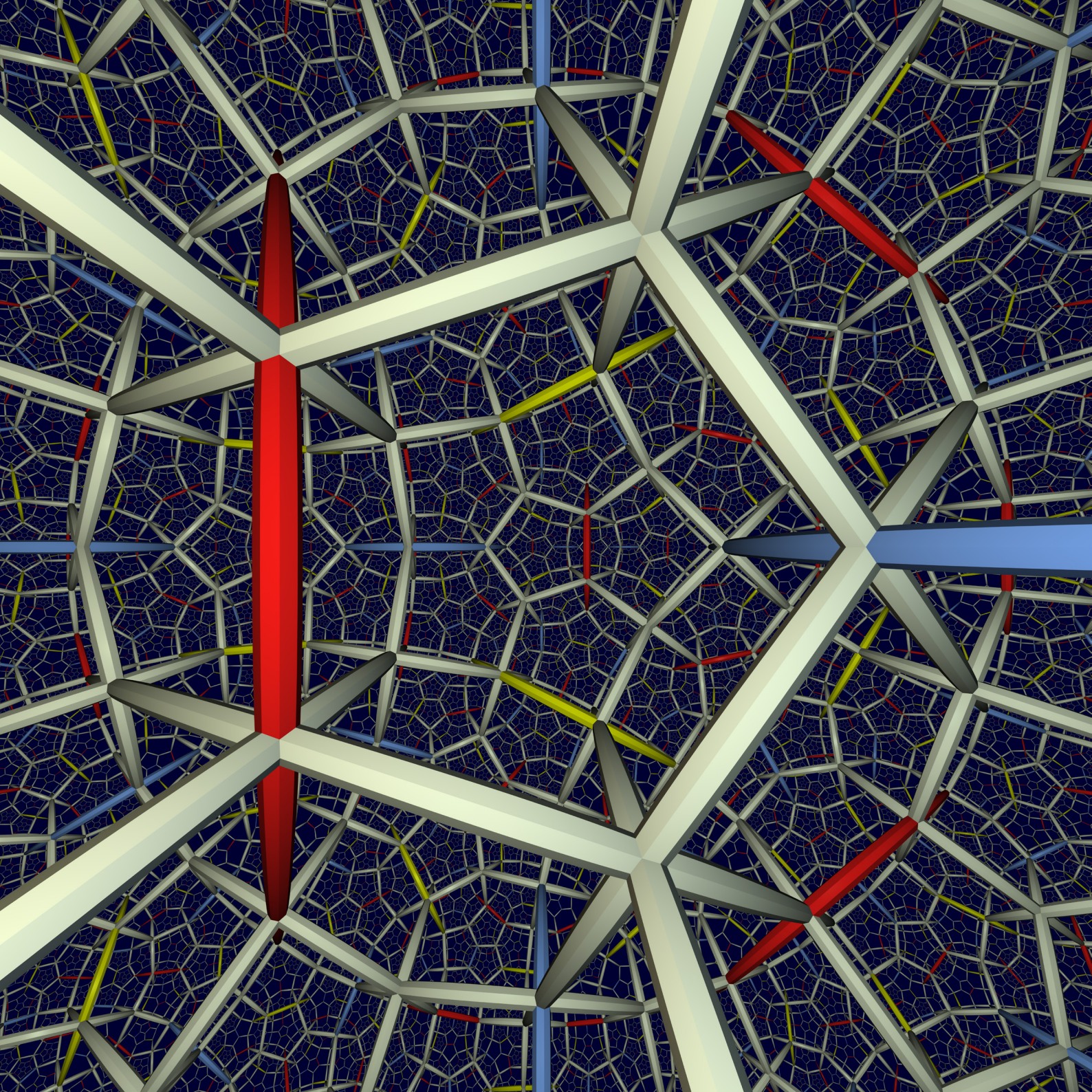


39. Otra perspectiva

Futbol en 4D

En la imagen, la 120 celda se ha proyectado primero desde su centro sobre la esfera S^3 que la circunscribe (que bien podría ser, por analogía con la figura del texto anterior, el balón de futbol de los habitantes de la cuarta dimensión), y después se ha tomado su 'sombra' en el espacio 3D iluminándolo desde un punto situado a una cierta distancia, en dirección perpendicular, del centro de una de sus 'caras'. La 'cara' más cercana al punto de iluminación queda visualizada como el dodecaedro exterior. La 'cara' opuesta corresponde al dodecaedro más pequeño en el centro de la imagen. Como en la imagen anterior, los dodecaedros están curvados de manera que los pentágonos son trozos de esferas y las aristas trozos de circunferencias. La ilustración muestra como sería la 'sombra' de la 120 celda iluminándola directamente (sin proyectar primero sobre la esfera) desde un punto situado perpendicularmente sobre el centro de una de sus 'caras'.



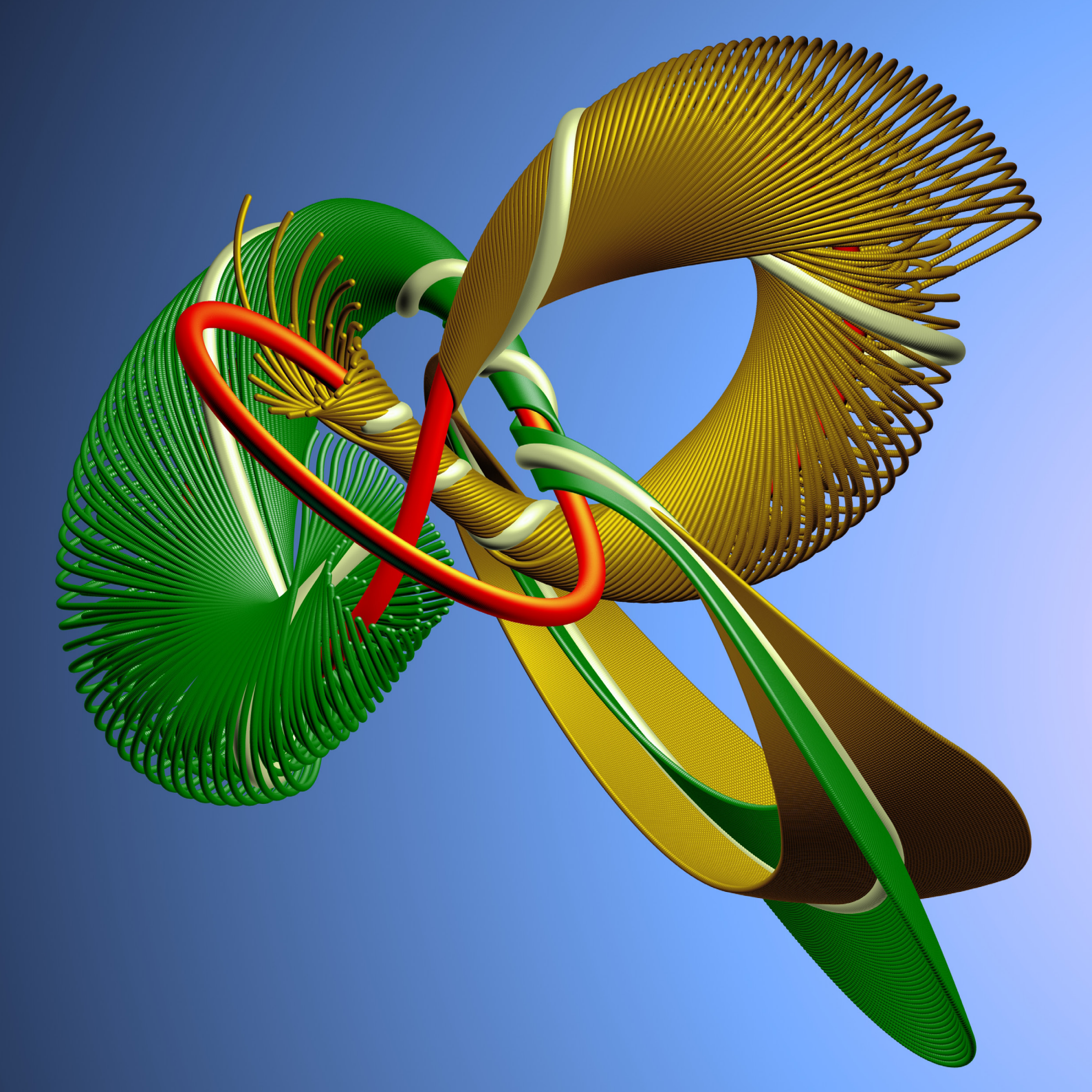


Charles Gunn

40. Posibilidades hiperbólicas

Donde con dodecaedros se puede recubrir el espacio

El espacio euclidiano ordinario no se puede recubrir (la palabra usada en matemáticos es *teselar*) con dodecaedros regulares. Es imposible por las mismas razones que un plano euclidiano se puede teselar con triángulos, cuadrados y hexágonos regulares, pero no con pentágonos regulares (el ángulo interior en un vértice del pentágono regular es 108°, que no divide a 360°). Pero existen planos y espacios llamados *hiperbólicos* que se pueden teselar por pentágonos y dodecaedros regulares, respectivamente. Esto es posible debido a que estos espacios tienen 'curvatura', lo cual conlleva, por ejemplo, que existen pentágonos regulares cuyos ángulos interiores son rectos, y estos pentágonos 'se pegan' tan bien en el plano hiperbólico como los cuadrados en el plano euclidiano. La figura representa la teselación con dodecaedros regulares del espacio hiperbólico, que 'se pegan' tan bien como los cubos en el espacio euclidiano.

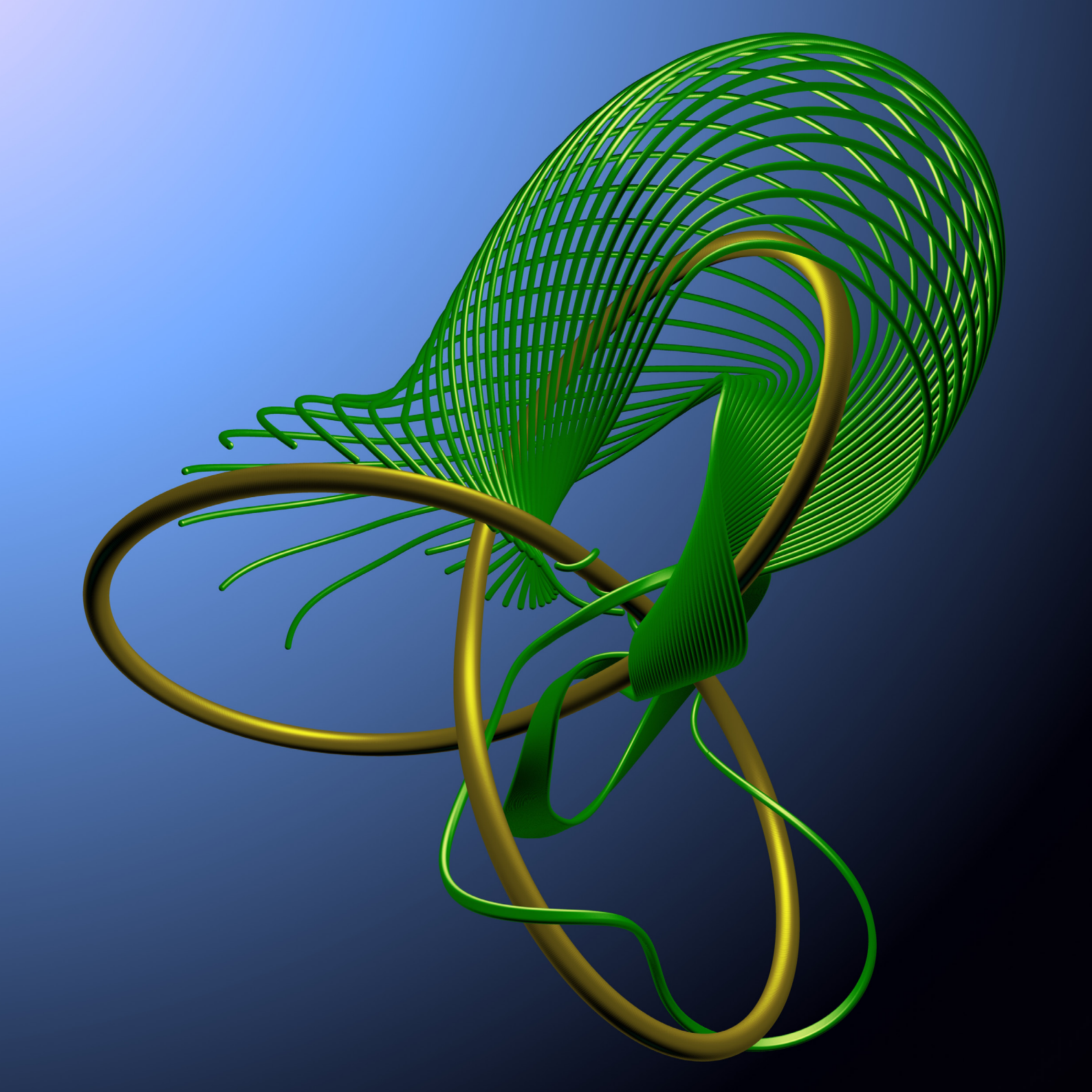


Aurélien Alvarez, Étienne Ghys, Jos Leys

41. Conexiones inesperadas

¿Puede la Aritmética prescindir de los Sistemas dinámicos?

La Aritmética estudia los números, la Geometría y la Topología estudian las formas, la Dinámica estudia el movimiento, el cambio de las configuraciones al transcurrir el tiempo. Una descripción de este estilo podría hacer pensar que las fronteras entre estos dominios están bien definidas y que entre ellos hay poca interacción. Sin embargo se constata todo lo contrario, esto es, que entre los distintos dominios de las matemáticas hay profundas interconexiones. La imagen ilustra un caso elocuente. Esta embarullada topología es una visualización de un *flujo de Anosov*. Más concretamente, es el flujo de uno de los sistemas dinámicos 'modulares', los cuales resultan ser fundamentales para el estudio de los números enteros, y en particular de los números primos.

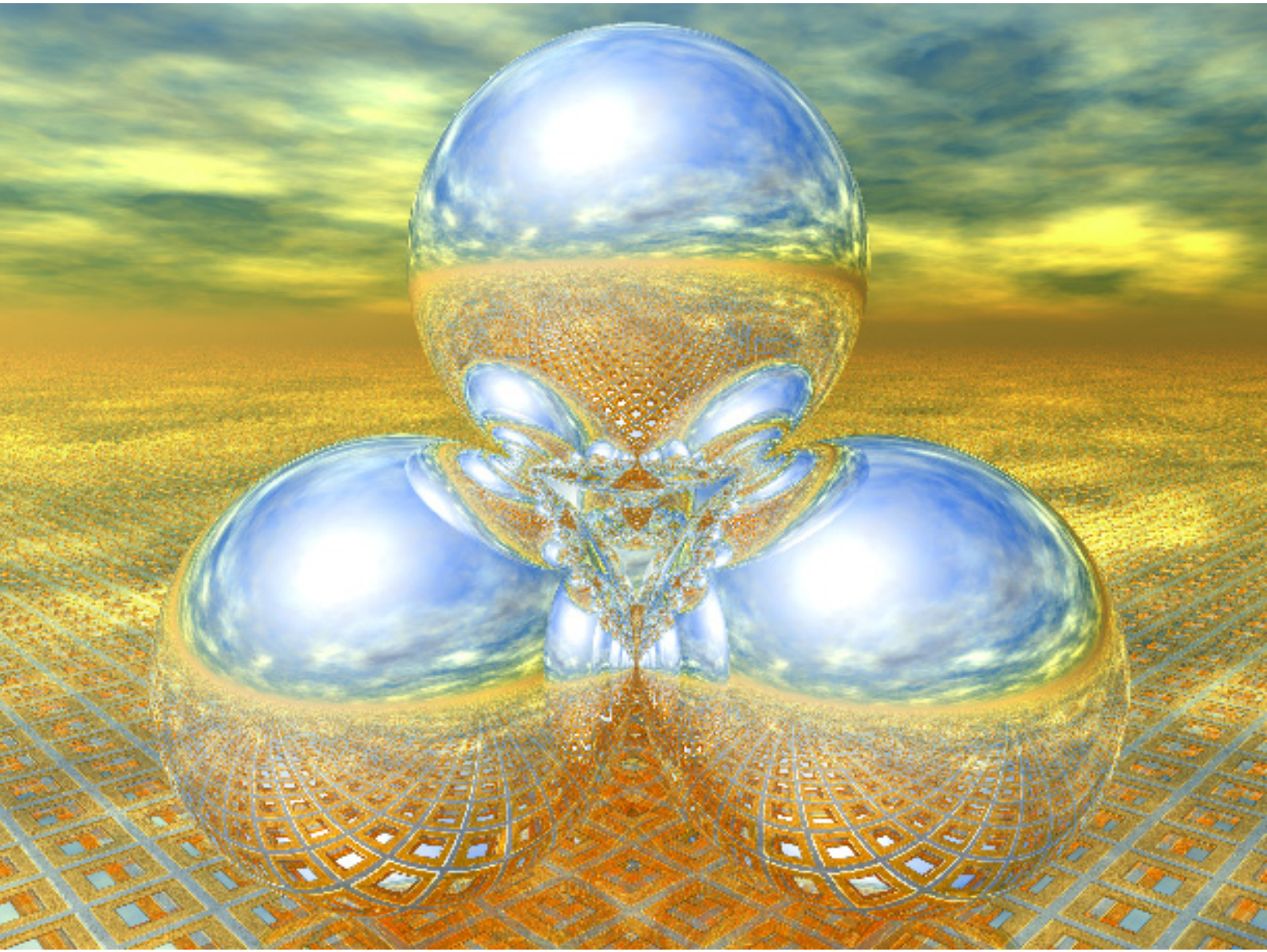


42. Rizando el rizo

Matemática no hay más que una

Otra bella imagen de un flujo modular relacionado con el nudo Trébol. Para una introducción a los sistemas dinámicos modulares, y su relación con la teoría de las curvas elípticas y la teoría de números, se puede consultar el magnífico artículo [+]. Su subtítulo, "A tangled tale linking lattices, knots, templates, and strange attractors . . .", apunta al hecho, como una más entre innumerables muestras, de que en la 'realidad matemática' todo está íntimamente interconectado, y que en buena medida el oficio matemático, por no llamarle arte, tiene por objeto poner de manifiesto nuevas conexiones, nuevos caminos que unen inesperadamente los conceptos.

[+] Étienne Ghys, Jos Leys: *Lorenz and Modular Flows: A Visual Introduction*. Monthly Essays on Mathematical Topics, American Mathematical Society, 2006.



Luc Benard

43. Cuencas de Wada

... o las esferas del Guggenheim

Esta bella imagen, creada por Richard Palais y Luc Benard, es una reproducción en el ordenador de los resultados de ciertos experimentos de "dispersión caótica". Ésta consiste en la iteración de una partícula con un sistema que se dispersa y su estudio tiene aplicaciones en dinámica de fluidos, cosmología, termodinámica, mecánica celeste y física de partículas.

La configuración básica está compuesta por cuatro bolas idénticas y muy reflectantes colocadas formando un tetraedro y de tal forma que cada bola toque a las otras tres, es decir, a la manera en que el frutero coloca las naranjas. Si se mira en el hueco entre tres bolas, las imágenes reflejadas que se ven forman un fractal tridimensional. Este experimento puede realizarse en casa con cuatro bolas de navidad reflectantes.

La obra "El gran árbol y el ojo" (2009) del escultor Anish Kapoor, que se encuentra en el exterior del Museo Guggenheim de Bilbao, es una versión libre, y con múltiples esferas espejadas que se reflejan unas en otras, del efecto de las cuencas de Wada.



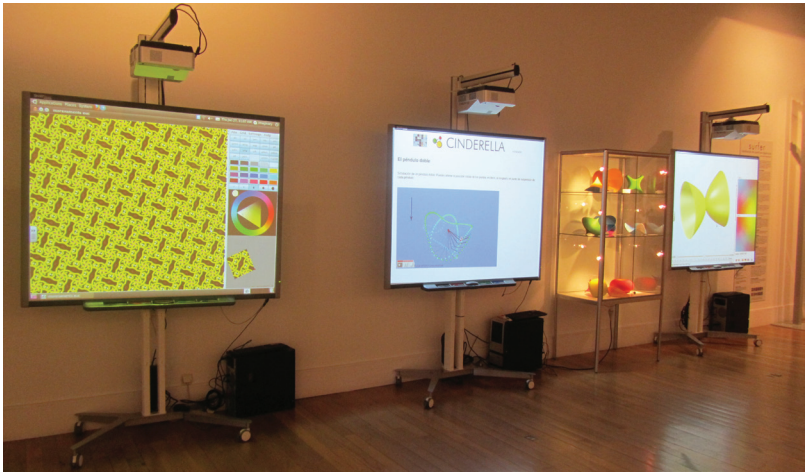
44. Naturaleza muerta

Cinco superficies de vidrio sobre una mesa

Siguiendo la tradición de las "naturalezas muertas" (bodegones) de la historia del arte, el matemático Richard Palais y el artista gráfico Luc Benard han creado esta obra en la que los objetos son superficies matemáticas.

Las superficies de este bodegón tienen propiedades geométricas destacables e interés histórico, pero han sido elegidas principalmente por su belleza. Son, desde abajo a la izquierda y en el sentido de las agujas del reloj: la Botella de Klein (superficie no orientable, de una sola cara), el 4-noide simétrico (superficie minimal), la superficie pseudoesférica de tipo pulsante (ejemplo de superficie con una geometría no euclídea, de tipo hiperbólico, $K<0$), la superficie de Boy (superficie no orientable) y la superficie de Siervert-Enneper (ejemplo de superficie con una geometría no euclídea, de tipo elíptico, $K>0$).

Esta composición fue galardonada con el primer premio del Concurso de Visualización en Ciencia e Ingeniería de la revista Science y la National Science Foundation de EEUU.

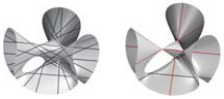

CINDERELLA

PIZARRAS INTERACTIVAS



Cúbica de Cayley

Como se ha visto en la introducción, toda cúbica lisa contiene exactamente 27 rectas. Para una cúbica singular, el número de rectas que contiene es o bien ∞ o < 27. La razón es que si empezamos con una cúbica lisa (imagen izquierda) y contraemos alguno de sus cuellos, entonces algunas de las rectas acaban coincidiendo.



La cúbica de Cayley (derecha) se obtiene contrayendo los 4 cuellos de la cúbica lisa, lo cual da lugar a 4 singularidades cónicas, y resulta que hay 6 grupos de 4 rectas que acaban coincidiendo (rectas de color rojo en la imagen de la derecha). Las otras 3 rectas (en negro) siguen siendo distintas. Tenemos, pues, $6 + 3 = 9$ rectas, pero contando las rojas con multiplicidad 4 y las negras con multiplicidad 1, se tienen $6 \cdot 4 + 3 = 27$ rectas, como en el caso liso.

0.50
a b x y z + - * ^ . ( ) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Borrar
x^3+y^3+z^3+1-0.5*a*(x+y+z+1)^3 =0
1

SURFER

Visualización de Superficies algebraicas

SURFER es un programa de visualización de superficies algebraicas reales, esto es, las dadas igualando a 0 un polinomio real en las variables x, y, z.

Entrada de un polinomio. El polinomio se puede introducir en la línea de comandos situada en la parte inferior izquierda. Si SURFER interpreta que la expresión es un polinomio en x, y, z, la superficie que representa es mostrada inmediatamente, primero en baja resolución y, tras unos instantes de cálculo, en alta resolución. En caso contrario, un signo de exclamación aparece en la parte derecha de la línea de comandos.

Colores. La pestaña "Colores" permite escoger un color para cada una de las dos caras de la superficie.

Rotaciones. La superficie se puede girar sobre su centro deslizando sobre la pizarra la yema de un dedo (es como arrastrar con el ratón, con el botón derecho pulsado, cuando el control es desde el computador). Durante la rotación, la superficie se muestra en baja resolución y después, tras unos instantes de cálculo, en alta resolución.

Lupa. SURFER solo muestra la parte de la superficie contenida en una esfera invisible. El radio de esta esfera se puede cambiar con el cursor de la lupa (parte derecha de la ventana en la que se muestran las superficies). Como el tamaño de dicha esfera en la ventana es siempre el mismo, el efecto es de acercar o alejar la superficie.

Parámetros. Los parámetros *a* y *b* se pueden usar en la línea de comandos. En tal caso, aparece un cursor para cada uno que permite cambiar su valor entre 0 y 1. También se pueden usar los parámetros *c* (entre 0 y 1) y *d* (entre 1 y 10).

Galerías e información. La pestaña "Galería" permite acceder a 88 superficies agrupadas en cinco series. Para tres de las series, las superficies van acompañadas de información adicional, accesible a través de la opción "Información", que por otra parte es la opción por defecto. Las dos pequeñas flechas verdes sirven para mostrar las superficies siguiente o anterior, respectivamente, de la serie seleccionada.

Descarga e instalación. El programa SURFER se puede descargar gratuitamente de la web www.rsme-imaginary.es/SURFER y se puede usar para fines educativos o de trabajo personal.



Esculturas

Impresión 3D de superficies algebraicas

De las formas nos formamos imágenes mentales. Es un nexo entre la percepción y la imaginación. Las imágenes mentales a veces sugieren fórmulas, como puede ser el caso de Zitrus/Limón. El camino inverso no es menos interesante. Podemos fácilmente imaginar una infinidad de fórmulas, y a cada una de ellas le corresponde, según la prescripción de la geometría analítica, una figura. Pero esta figura es elusiva, salvo en lo casos más simples, a no ser que dispongamos de medios de cálculo y visualización como SURER. Finalmente, con técnicas algorítmicas apropiadas y la tecnología de las impresoras 3D, podemos acabar produciento una materialización física de la fórmula.

En la exposición se muestran diez de estas esculturas. Son las que corresponden a Zitrus/Limón (1), Tülle/Embrollo (4), Helix/Hélice (5), Napali/Napalí (6), Vis-à-Vis/Ty y Yo (10), Croissant/Cruasán (14), Dullo/Manzana (19), Distel/Destello (20), Kreisel/Giroscopio (21) y Schneeflocke/Copo de nieve (31).



¡-REALITY

Mundos matemáticos

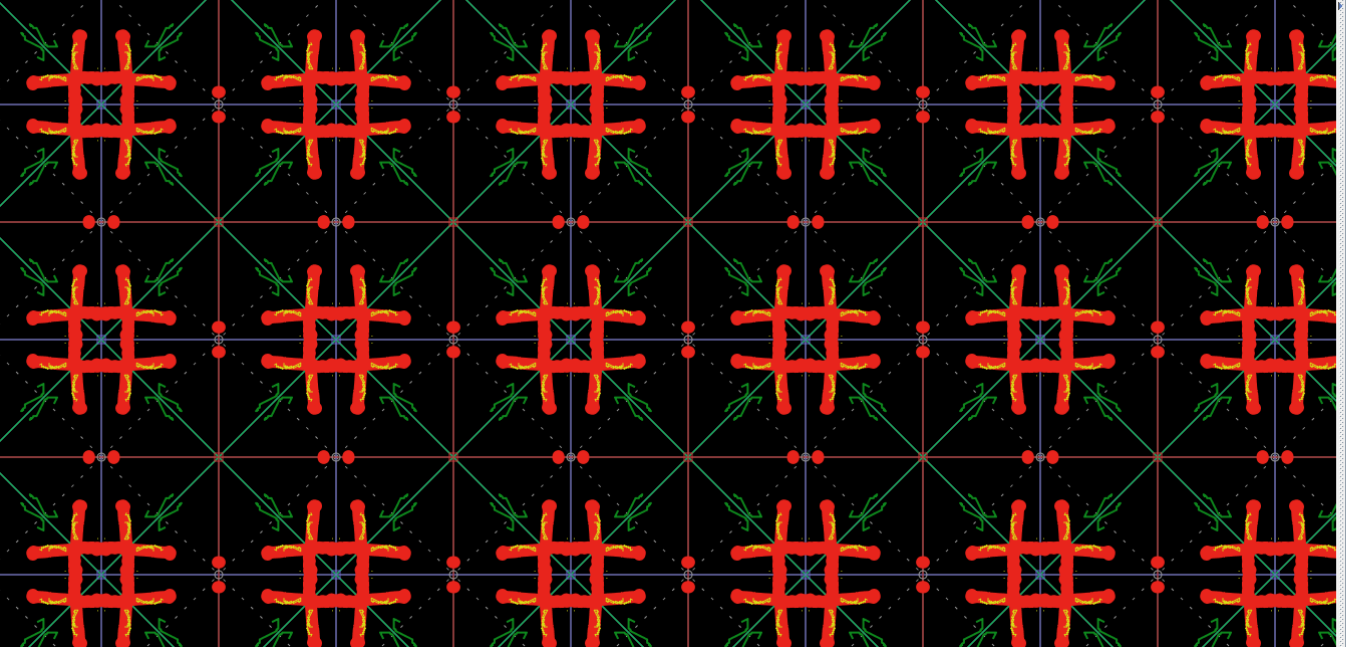
El oso Matheon. La escultura del oso Matheon se encuentra frente al edificio del Centro de Investigación Matemática Matheon en Berlín. El oso es interesante desde un punto de vista matemático por el patrón pintado en él. Un patrón periódico de circunferencias y logotipos del instituto forman el plano base y el reto matemático consistió en aplicarlo sobre la superficie del oso de manera que las formas fuesen distorsionadas lo menos posible. Los ángulos en el patrón son los mismos que los correspondientes en el oso (a una transformación de este tipo se le llama "conforme"), lo que implica geométricamente una deformación pequeña en las formas.

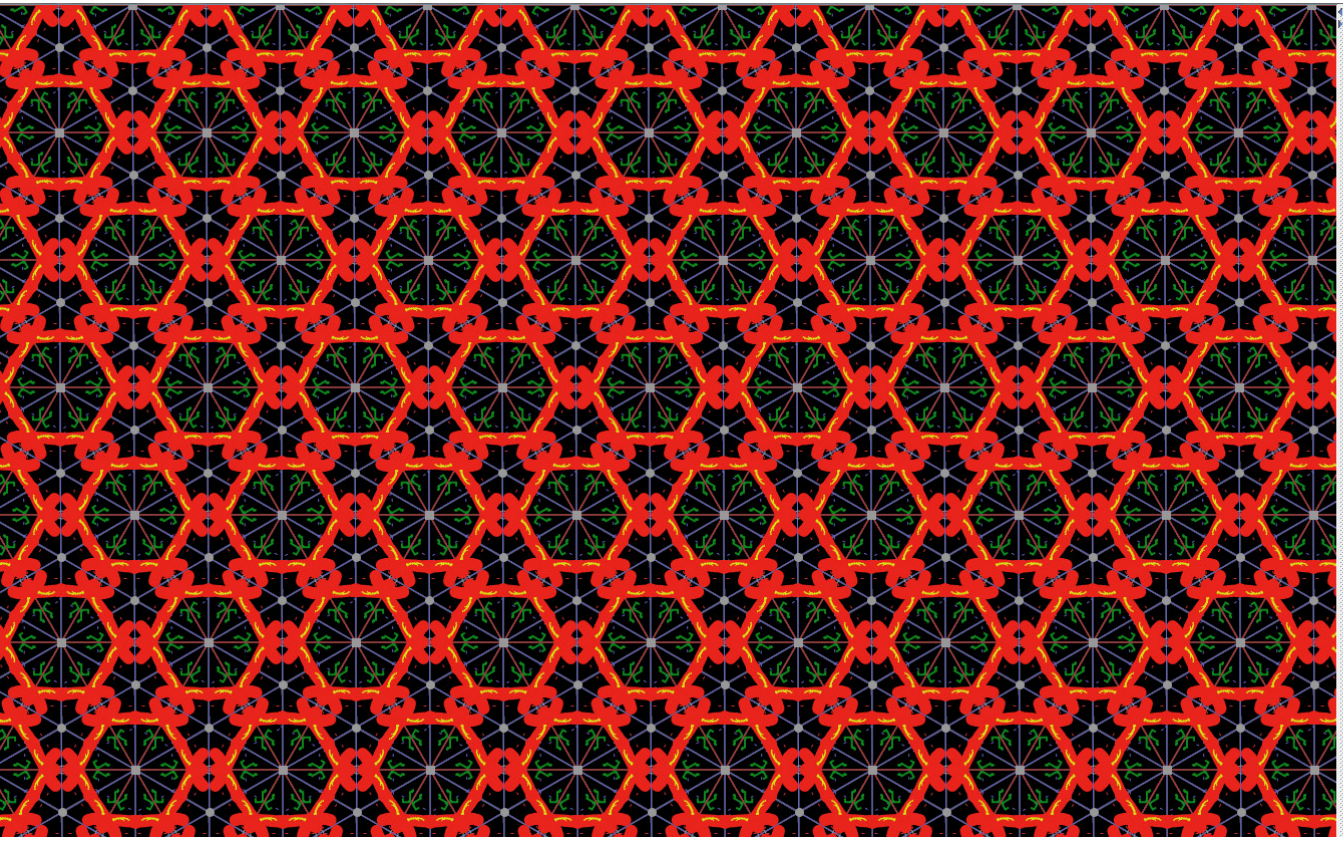
Superficie minimal de Schwarz. Fue encontrada por Hermann Schwarz en el siglo XIX y, añadiendo copias de forma periódica, se extiende por las tres direcciones del espacio, e incluso lo divide en dos mitades iguales. La versión que vemos aquí no es, estrictamente hablando, una superficie diferenciable (suave), sino que se compone de muchos discos circulares en contacto entre sí de una manera determinada. Estas "discretizaciones" de superficies diferenciables han desempeñado recientemente un papel importante en la arquitectura para crear superficies curvas con elementos planos.

Sitio de superficies minimales. El arte de crear superficies minimales consiste en construirlas de modo que, sin tener borde, se extiendan hacia el infinito, pero sin cortarse a sí mismas. La superficie de Enneper mostrada aquí puede ser continuada indefinidamente, pero al hacerlo pronto se producirán autointersecciones. En este sentido, esta superficie podría eliminarse del taller de un constructor de superficies minimales, pero de cualquier forma es hermosa. Podemos pensar en la superficie de Enneper como un disco doblado para que tenga forma de silla de montar y de tal forma que sea una superficie minimal.

Toro de Willmore. Las películas de jabón oponen resistencia a ser estiradas, pero se doblan sin ningún esfuerzo. Las superficies de Willmore, en cambio, no oponen resistencia si se las estira, pero producen una fuerza elástica contraria a la flexión. Son un modelo matemático para las membranas fluidas (presentes en campos tan variados como las industrias química y farmacológica, la petrolífera, la cosmética, la medicina, etc...) y las vesículas (células animales, glóbulos rojos,...). La imagen es de una porción de un toro con la propiedad de Willmore (hallado por Matthias Heil usando resultados de Babich y Babenko).

Helicoides con asas, Tetranoide y Superficie de Boy. Véanse los paneles 33, 35 y 36, respectivamente.


p1
pm
pg
cm
p2
pmm
pmg
pgg
cmm
p4
p4m
p4g
p3
p3m1
p31m
p6
p6m
p * 2 * p


p1
pm
pg
cm
p2
pmm
pmg
pgg
cmm
p4
p4m
p4g
p3
p3m1
p31m
p6
p6m
p * 2 * p
written by Martin von Gagern

Morenaments

Mosaicos planos

Hay exactamente 17 maneras distintas de construir mosaicos planos. Cada una de ellas corresponde a un grupo de simetrías o de movimientos del plano. En la pantalla interactiva de Morenaments, el tipo de mosaico se selecciona pulsando uno de los botones de colores de la parte superior derecha. La rueda de colores y su triángulo permiten seleccionar un color, que se muestra en el pequeño círculo en la parte superior izquierda de la rueda. Para producir un mosaico, basta mover un dedo en contacto con la zona de dibujo de la pantalla. El trazo se repite automáticamente en consonancia con el grupo seleccionado, que se puede cambiar en cualquier momento. El grosor del trazo se puede escoger pulsando uno de las cinco botones situados inmediatamente encima de la rueda de colores. Los otros botones son controles para efectuar determinadas tareas, como deshacer el último cambio o borrar todo y empezar de nuevo.

p1. Contiene sólo traslaciones. No hay ni reflexiones ni rotaciones. Los dos ejes de traslación pueden formar cualquier ángulo.

pg. Contiene reflexiones con deslizamiento. La dirección de esta reflexión con deslizamiento es paralela a uno de los ejes de traslación y perpendicular al otro. No hay ni rotaciones ni reflexiones puras.

pm. Contiene reflexiones. Los ejes de reflexión son paralelos a uno de los ejes de traslación y perpendiculares al otro. La red es rectangular. No hay rotaciones, ni reflexiones con deslizamiento.

cm. Contiene reflexiones y reflexiones con deslizamiento con ejes paralelos. No hay rotaciones. Las traslaciones pueden formar cualquier ángulo.

p2. Este grupo se diferencia de p1 en que contiene rotaciones de 180°, es decir, de orden 2.

pgg. No contiene reflexiones, pero tiene reflexiones con deslizamiento en dos direcciones perpendiculares y rotaciones de 180 °. Los centros de rotación no pertenecen a los ejes.

pmg. Contiene reflexiones puras y con deslizamiento en ejes perpendiculares. Tiene rotaciones de orden 2 en los ejes de la reflexión con deslizamiento.

pmm. Contiene reflexiones puras y con deslizamiento con ejes perpendiculares, y también rotaciones de orden 2 en los puntos de intersección.

cmm. Contiene ejes perpendiculares de reflexión, y rotaciones de orden 2, cuyos centros no están en los ejes de reflexión.

p4. Contiene rotaciones de 90 °, es decir, de orden 4 y rotaciones de orden 2 . No hay reflexiones.

p4g. Contiene reflexiones puras y con deslizamiento y rotaciones de las órdenes de 2 y 4. Hay dos ejes de reflexiones puras perpendiculares que pasa por los centros de orden 2.

p4m. Contiene rotaciones de orden 2 y 4. Por cada centro de rotación de orden 4 pasan cuatro ejes de reflexión. Hay dos ejes de reflexiones con deslizamiento pasando por cada centro de rotación orden de 2.

p3. Contiene rotaciones de orden 3. No contiene reflexiones puras ni con deslizamiento.

p31m. Contiene reflexiones (cuyos ejes forman ángulo de 60°) y rotaciones de orden 3. Algunos de los centros de rotación se encuentran en los ejes de reflexión, y otros no. Hay reflexiones con deslizamiento.

p3m1. Contiene reflexiones (cuyos ejes forman ángulo de 60 °) y rotaciones de orden 3. Los centros de rotación se encuentran en los ejes de reflexión. Hay reflexiones con deslizamiento.

p6. Contiene rotaciones de orden 2, 3 y 6. No existen reflexiones.

p6m. Contiene rotaciones de orden 2, 3 y 6 y reflexiones. Por los centros rotación de orden 6 pasan seis ejes de reflexión. Hay reflexiones con deslizamiento.

CLASIFICACIÓN

Sin reflexiones :

$$r = \begin{cases} 6 \rightarrow \text{p6} \\ 4 \rightarrow \text{p4} \\ 3 \rightarrow \text{p3} \\ 2 : g\ ? \begin{cases} \text{Sí} \rightarrow \text{pgg} \\ \text{No} \rightarrow \text{p2} \end{cases} \\ 1 : g\ ? \begin{cases} \text{Sí} \rightarrow \text{pg} \\ \text{No} \rightarrow \text{p1} \end{cases} \end{cases}$$

Con reflexiones (m)

$$r = \begin{cases} 6 \rightarrow \text{p6m} \\ 4 : \quad m \text{ a } 45^o\ ? \begin{cases} \text{Sí} \rightarrow \text{p4m} \\ \text{No} \rightarrow \text{p4g} \end{cases} \\ 3 : c\ ? \begin{cases} \text{Sí} \rightarrow \text{p31m} \\ \text{No} \rightarrow \text{p3m1} \end{cases} \\ 2 : \quad m \text{ a } 90^o\ ? \begin{cases} \text{Sí} \rightarrow c\ ? \begin{cases} \text{Sí} \rightarrow \text{cmm} \\ \text{No} \rightarrow \text{pmm} \end{cases} \\ \text{No} \rightarrow \text{pmg} \end{cases} \\ 1 : g \neq m \begin{cases} \text{Sí} \rightarrow \text{cm} \\ \text{No} \rightarrow \text{pm} \end{cases} \end{cases}$$

Significado de los símbolos:

p=célula primitiva (región mínima repetida por translaciones)
m=reflexión (*mirror*)
g=reflexión con deslizamiento (*glide reflection*)
c=existe centro de rotación que no pertenece a ningún eje de reflexión
r=orden rotación mínima (1,2,3,4 o 6)

Referencia: http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group