

Llimona (*Zitrus*)

$$x^2 + y^2 = z^3 (1 - z)^3$$

Això no és una llimona

La traïció de les imatges

En veure aquesta imatge, segurament tots hem pensat: “Això és una llimona”. Però si és una llimona, per què no té ni olor ni sabor?, per què no té ni porus ni taques? És clar que això no pot ser una llimona!

En efecte, aquesta figura no és una llimona, sinó un model matemàtic d'una llimona, que ens ajuda a entendre millor les propietats de la forma que té la llimona. Les equacions ens permeten construir models matemàtics que s'assemblen a les coses, i estudiar aquests models matemàtics ens ajuda, al seu torn, a entendre millor la forma de les coses.

El mapa no és el territori

Alfred H. S. Korzybski

Tot això forma part de la “poesia” de les matemàtiques. A partir d'equacions algebraïques podem generar belles superfícies que ens transporten els pensaments fins a racons insospitats de la ment.



Baldufa (Zeck)

$$x^2 + y^2 = z^3 (1 - z)$$

L'equació, un nom inequívoc

Imagina un nom per a aquesta figura...

Totes les figures que es mostren a l'exposició tenen nom. Si volguessis anomenar-les tu, quins noms hauries triat? Quin nom creus que deu haver-los posat una altra persona? Pregunta-ho!



Però, podem trobar una manera d'anomenar les figures que no porti mai a cap mena de confusió? Les matemàtiques han resolt aquest problema anomenant-les per la seva equació.

Una sola equació determina tota la figura, tots els seus punts i corbes, fins i tot tots els forats, tots els plecs i totes les puntes. Només falta aprendre a trobar-los en l'equació o saber dibuixar-la. És com quan t'ensenyen a escriure: tan bon punt ja saps escriure una paraula sense faltes, tothom l'entén.

A més, les equacions s'escriuen i s'interpreten igual a tot arreu, perquè el llenguatge de les matemàtiques és universal, com les partitures musicals.

Colibrí (*Kolibri*)

$$z^3 + y^2 z^2 = x^2$$

Diàleg entre geometria i àlgebra

L'equació és la directora dels punts

Observa què ens diu l'àlgebra sobre Colibrí: està formada per totes les ternes (x, y, z) de nombres que satisfan $x^2 = y^2 z^2 + z^3$.

Per exemple,

$$(0,0,0), (1,0,1) \text{ i } (3,-2,-3)$$

són punts de Colibrí, mentre que $(0,1,1)$ no ho és.

En general, l'equació descriu exactament la figura: a cada punt li correspon una terna (x, y, z) de nombres que és solució de l'equació, i a l'inrevés.

Però Colibrí és una figura geomètrica que veiem en l'espai! Com sorgeix la figura de Colibrí a partir d'aquests nombres?

Això ens ho diu la geometria: per interpretar x, y, z necessites triar un conveni per tal d'orientar-te en l'espai, és a dir, un sistema de coordenades. Aquest consta de tres eixos que passen per un punt, anomenat origen, i que determinen les tres direccions: enrere-endavant, esquerra-dreta i avall-amunt.

Així, les coordenades (x, y, z) indiquen quina longitud s'ha recorregut en cada una de les tres direccions des de l'origen fins a arribar al punt en qüestió.

Embull (*Tülle*)

$$y z (x^2 + y - z) = 0$$

Infinites punts en una paraula

Els Cigronets de les matemàtiques

Així com els impressionistes pintaven cases i prats amb milers de punts de pintura, les superfícies també estan formades per milers de punts. De fet, una infinitat, i tots solucions d'una equació!

Una manera de pensar en l'infinit és començar a comptar:

1, 2, 3...

Sempre hi ha un nombre més gran, i no acabem mai d'anomenar tots els nombres naturals.

En l'equació d'Embull, y i z multipliquen tota l'equació. Per tant, tots els punts dels plans $z=0$ (horitzontal) i $y=0$ (vertical) formen part d'Embull.

Però no solament figures com Embull, que conté dos plans, estan formades per una infinitat de punts. Un quadrat, sense anar gaire lluny, també.

Sembla impossible que infinites punts càpiguen en un quadrat, que és una porció finita, veritat? Pensa que els punts són tan petits que se'ls considera de dimensió zero, i si en poguéssim dibuixar realment un, no seria perceptible a l'ull humà.

Hèlix (*Helix*)

$$6x^2 = 2x^4 + y^2 z^2$$

Més fines que una bombolla de sabó

*No es poden esculpir
de tan fines com són*

Les bombolles de sabó són extremadament delicades, tant que de vegades sembla que esclaten pel simple fet de mirar-les.

Tanmateix, la seva superfície està formada per una capa d'aigua atrapada entre dues capes de sabó. Quan són massa fines —per exemple, quan la bombolla de sabó creix—, l'aigua de la capa interior fa esclatar la bombolla.

Les superfícies algebraiques són moltíssim més fines que les bombolles de sabó, ja que estan fetes d'una sola capa de punts. I com que només fem servir la imaginació per a produir els punts, sense gruix ni massa, les superfícies no esclaten, tot i tenir puntes o plecs tan marcats com els d'Hèlix.

Així, si volem tocar la superfície d'Hèlix en un model tridimensional, hem de crear una escultura més gruixuda que Hèlix, engrossint la superfície per un dels costats. L'escultura d'Hèlix que es mostra a la vitrina s'ha engrossit pel costat interior.



Nepalès (*Nepali*)

$$(x^2 + y^2 - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$$

Caben en una bola o s'estenen fins a l'infinit?

Un món sense fi

Potser alguna superfície et sembla francament bella i et vénen ganes d'introduir-la dins una bola de vidre plena de neu, per poder-la sacsejar i jugar-hi. Però no et pensis que pots triar qualsevol superfície i posar-te-la dins de l'habitació!

Hi ha superfícies que s'estenen fins a l'infinit i, per molt boniques que siguin, mai no les podràs posar dins d'una bola de vidre, ni que sigui immensa.

Quan passa això, es diu que no són fitades i per dibuixar-les hem de triar-ne una porció: per això sembla que algunes estan tallades, com Embull, de la qual només veiem la porció continguda en una esfera. En canvi Nepalès està fitada. T'atreveixes a deduir-ho de l'equació?

La propietat de ser fitada no és fàcil de percebre empíricament, fins i tot amb l'ajuda de SURFER. És com esbrinar si l'univers és tancat; malgrat que no en coneguis els límits, pot ser que en tingui o que no en tingui.

Cel i Infern (*Himmel und Hölle*)

$$x^2 - y^2z^2 = 0$$

Creant noves formes

La simplicitat sorprenent de l'àlgebra

Per crear noves formes cal conèixer-ne les equacions. Les peces bàsiques són els monomis, expressions algebraiques amb lletres i nombres.

En un monomi es distingeixen aquests elements:

signe, **coeficient**, **variables**,
exponents i grau.

Per exemple:

$$2xy^2z = +2x^1y^2z^1$$

El grau del monomi és la suma dels exponents de les variables que el componen:

$$\text{grau} = 1 + 2 + 1 = 4$$

Per formar equacions, únicament s'usen les operacions de suma, resta i multiplicació, que coneixem des que som molt menuts. Malgrat això, amb operacions tan simples s'aconsegueix obtenir superfícies molt especials: les *superfícies algebraiques*.

T'atreveixes a crear formes amb puntes o forats només sumant i multiplicant?

Encenall (*Quaste*)

$$8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 + 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - 8x^6 - 24x^4y^2 - 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 - 54x^2z^4 - 108y^2z^4 + 27z^6 - 108x^2y^2z + 54y^4z - 54y^2z^3 + 27y^4 = 0$$

L'abecedari de les equacions

Com més grau, més lletres

T'has fixat en l'equació d'Encenall? Sembla enormement complicada. En canvi, la figura és fàcil de descriure: la vora superior té la forma de la lletra grega alfa, α ; la vora dreta té la forma d'una corba amb una punta, anomenada cúspide; si fas lliscar aquesta corba cuspidal paral·lelament al llarg de la corba en forma d'alfa, obtens Encenall.

Les superfícies que posseeixen aquesta propietat reben el nom de productes cartesianes, en honor del matemàtic René Descartes.

Combinant x , y , z podem construir monomis de grau 1, que coincideixen amb les mateixes variables x , y , z ; grau 2: x^2 , xy , y^2 , xz , yz , z^2 ; i així successivament. Com més elevat és el grau, més monomis tenim, i això ens dóna joc per a crear formes més complicades.

És com un abecedari: si disposem de més lletres, podrem escriure paraules més complicades.

Llàgrima (*Ding-dong*)

$$x^2 + y^2 + z^3 = z^2$$

Deformar la figura deformant l'equació

L'equilibri de les estalactites

L'equació i la forma de Llàgrima són molt simples. La figura s'ha obtingut girant la forma de la lletra grega alfa al voltant d'un eix. Mirant-la al revés, sembla una gota d'aigua. Gairebé es podria dir que la veiem caure!

Afegint paràmetres a l'equació, i modificant-los de manera contínua, podem crear una seqüència d'imatges en què podríem veure com es genera la gota, com es va acostant a la posició límit i, finalment, com es desprèn. És com crear una seqüència de fotogrames d'una pel·lícula.

A cada instant, la gota es troba en una situació d'equilibri, en què la força de la gravetat compensa la tensió superficial del líquid. Però l'equilibri de Llàgrima és clarament inestable i les gotes hi passen tremolant fins que es desprenen.

La teoria de catàstrofes del matemàtic René Thom estudia com canvis petits dels paràmetres poden portar a canvis d'equilibri sobtats.

Tu i Jo (*Vis à Vis*)

$$x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$$

Singular versus llis

Amics o enemies

Els punts singulars, o singularitats, sovint s'identifiquen fàcilment de forma visual perquè són punts en què la superfície no és llisa ni suau, com ara un pic o un plec.

La superfície Tu i Jo il·lustra força bé què és una singularitat (el pic de l'esquerra) i què no ho és (el tossal llis de la dreta).

Les singularitats són interessants, entre altres coses perquè petits canvis en l'equació poden canviar-ne l'aspecte de forma sorprenent, al contrari del que passa amb els punts llisos, que són estables.

Saps que hi ha gent que es dedica especialment a l'estudi d'aquests punts?

Els forats negres i el principi de l'univers, el Big Bang, són singularitats de les equacions dels models cosmològics.

Sense anar tan lluny, les singularitats de les nostres empremtes digitals ens identifiquen!



Passió (Süss)

$$(x^2 + 9/4y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - 9/80y^2z^3 = 0$$

Singularitat al cor

*Imagines un cor
sense punxa?*

Aiguamarina

Voldria, ni molt ni poc:
ésser lliure com una ala,
i no mudar-me del lloc
platejat d'aquesta cala;
i encendre el foc
del pensament que vibra,
i llegir només un llibre
antic,
sense dubte, ni enveja, ni enemic.

I no saber on anirem,
quan la mort ens cridi al tàlem:
creure en la fusta del rem,
i en la fusta de l'escàlem.

I fer tot el que fem,
oberts de cor i de parpelles,
i amb tots els cinc sentits;
sense la por de jeure avergonyits
quan surtin les estrelles.

Comprendre indistintament
rosa i espina;
i estimar aquest moment,
i aquesta mica de vent,
i el teu amor, transparent
com una aiguamarina.

Àncores i estrelles
Josep Maria de Sagarra

La passió amorosa acostuma a identificar-se amb la força emotiva d'alguna "singularitat" dolorosa i per això aquesta associació ha estat àmpliament utilitzada en el món de l'art, no solament arquitectònic i pictòric, sinó també en el narratiu i interpretatiu.



Sofà (Sofa)

$$x^2 + y^3 + z^5 = 0$$

Controlar el que és imprevisible

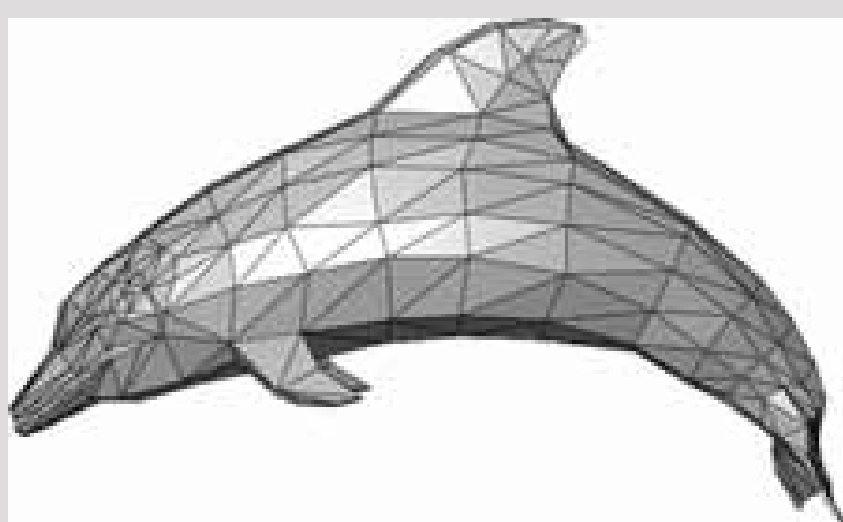
Singularitats amb suspens

Encara que Sofà té la forma d'una butaca moderna, no sembla gens còmode!

Si se situa una boleta al plec de Sofà, no podem preveure cap on caurà; en canvi, és fàcil imaginar la trajectòria de la boleta si se situa en qualsevol altre punt.

Aquesta impredictibilitat es manifesta en informàtica: per dibuixar una superfície, per esculpir-la o per calcular la trajectòria d'una boleta que hi llisca damunt, cal trobar una malla prou atapeïda de punts solució, i per a aquesta finalitat les singularitats són un obstacle, ja que els errors d'arrodoniment poden superar la distància entre els dos vessants del plec.

Una estratègia per a resoldre aquest inconvenient és aproximar prèviament l'equació prop dels punts singulars. Aquest enfocament sol tenir èxit, ja que la forma d'una superfície prop d'un punt es pot aproximar força bé!



Campaneta (*Daisy*)

$$(x^2 - y^3)^2 = (z^2 - y^2)^3$$

Amb ull matemàtic

Reconèixer les singularitats

Has après que puntes i plecs són singularitats, si bé n'hi ha de més tipus. Però imagina't ara que et tapen els ulls i t'impedeixen tocar la superfície. Com podries trobar-ne les singularitats?

Les singularitats es defineixen com els punts de la superfície que són solució de les derivades parcials de l'equació. Aquest mètode permet trobar les singularitats amb paper i llapis, sense necessitat de tenir la superfície a prop, tan sols mitjançant l'equació.

Per exemple, derivant l'equació

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

que representa un con, respecte de x , obtenim $2x$; respecte de y , $2y$; i respecte de z , $-2z$. Aquestes tres derivades s'anul·len alhora només en el punt $(0,0,0)$. Com que $(0,0,0)$ és un punt del con, hem trobat el seu únic punt singular, que, com podíem esperar, és la punta del con!

Si segueixes aquest mètode amb Campaneta, trobaràs que els punts singulars formen dues corbes planes que es tallen transversalment en el punt singular comú.

Croissant

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2 + 7\sqrt{5}/2 - 11/2)^2 \\ & - ((1 + \sqrt{5})x - 7 + 3\sqrt{5})^2 \\ & - (1 + \sqrt{5})^2 y^2 = 0 \end{aligned}$$

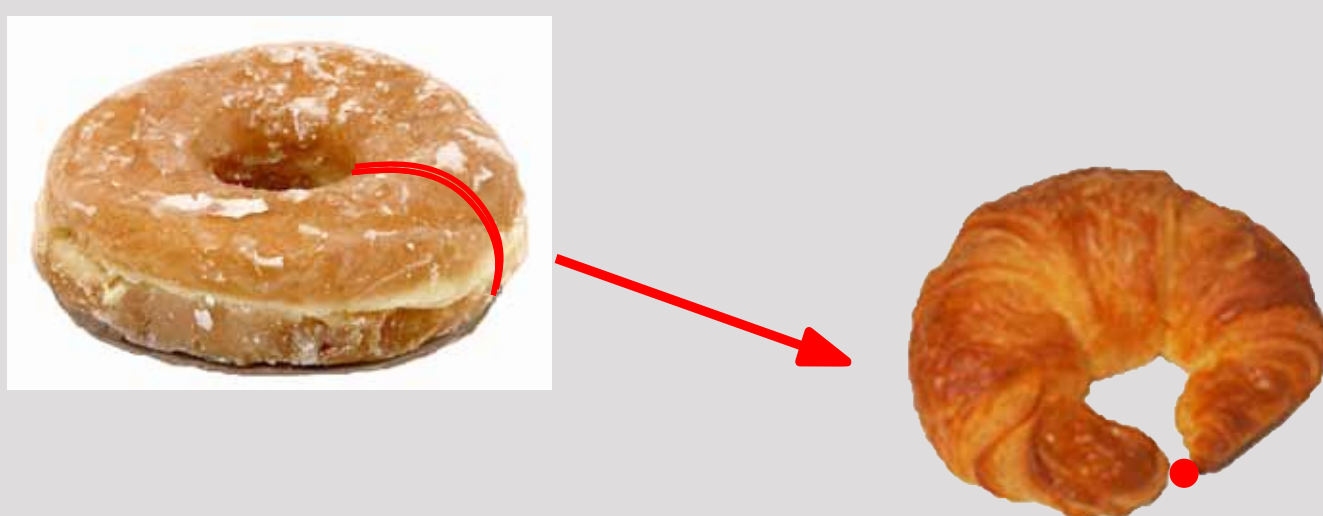
Resoldre per comprendre

Quan els punts exploten

Per comprendre millor les singularitats, s'utilitzen tècniques que permeten transformar, en un nombre finit de passos, superfícies singulars en superfícies llises.

Una manera d'entendre això és mitjançant globoflèxia: amb globus allargats podem obtenir figures girant i estrangulant la goma. Croissant té una estrangulació en el punt singular; si la desfem obtenim un dònut, una forma que rep el nom de tor. Concretament, el punt de Croissant explota i es transforma en una circumferència del tor.

Tot el procés s'anomena resolució de singularitats. Per exemple, si tenim un gos salsitxa amb diverses estrangulacions (singularitats), podem desfer-les fins a obtenir el globus original ben llis. Però, compte!, per a tornar a muntar el gosset, haurem de recordar els passos: resoldre i recordar.



Calipso (Calypso)

$$x^2 + y^2 z = z^2$$

L'estètica de la inestabilitat

Equacions de la creativitat

Les singularitats són delicades o inestables, com Calipso. Petites modificacions en l'equació transformen la superfície radicalment.

La inestabilitat de les singularitats és l'essència de la seva bellesa. Això també passa en arquitectura, per exemple amb les superfícies plegables: la inestabilitat permet el moviment de l'estructura i, per tant, el canvi de forma.

Sabies que els arquitectes fan servir equacions per saber quina forma presentarà l'obra a cada moment durant el desplegament? Els grans arquitectes són també grans coneixedors de les matemàtiques, i les equacions els permeten experimentar amb les formes somiades.

El plegament, com a mitjà per canviar la forma d'una carcassa, contradiu el principi d'estabilitat en la mesura que aquesta última és la capacitat de retenir la forma. Així, doncs, una estructura plegable necessàriament ha de ser inestable.

Olga Gil Medrano, *Un mundo en el bolsillo: la geometría plegable de Santiago Calatrava*.



Calze (Calyx)

$$x^2 + y^2z^3 = z^4$$

Elevar-se a dimensions superiors

Atrapades a la caverna de les ombres

Els punts singulars de Calze són tots els punts de l'eix Y. Si explotem aquesta recta, com hem fet amb el punt singular de Croissant, obtenim un cilindre, i Calze es transforma en Calipso! Si tornes a contemplar Calipso no veuràs aquest cilindre perquè habita en dimensions superiors i perquè només comparteix amb Calipso i el seu món tridimensional una recta.

Una altra manera d'entendre això és imaginar el procés invers: mitjançant una projecció adequada en un espai 5-dimensional, la superfície del cilindre es contrau en la recta singular de Calze, i d'aquesta manera Calze és l'ombra de Calipso!

Un resultat sorprenent del matemàtic Heisuke Hironaka afirma que qualsevol superfície amb alguna singularitat és l'ombra d'alguna superfície llisa, és a dir, sense singularitats, que pot habitar en un espai de dimensió superior a tres.

Podem imaginar que el món tridimensional és una caverna que atrapa les ombres de realitats de dimensió superior...

Ocellet (*Taube*)

$$256z^3 - 128x^2z^2 + 16x^4z + 144xy^2z - 4x^3y^2 - 27y^4 = 0$$

Origami multidimensional

La ubiquïtat de les cúspides

Si ens cauen unes estovalles a terra, queden plenes de plecs. La caiguda determina una assignació, o projecció, dels punts de les estovalles en els punts del terra, i els punts dels plecs formen una corba anomenada discriminant.

La manera de saber si un punt és del discriminant, és a dir, d'un plec, és travessar amb un agulla de cap les estovalles al voltant del punt: si el nombre de capes travessades no és el mateix en un entorn petit del punt, podem assegurar que està situat sobre un plec.

Hassler Whitney va observar que, en general, hi ha dos tipus de punts en un plec: els que componen la corba del plec i el punt extrem. Aquests punts extrems s'anomenen cúspides.

Imagina que, en comptes de superfícies, manipules objectes algebraics de dimensió superior i que pots fer projeccions entre aquests. Aleshores el discriminant, o els plecs, ja no serien corbes sinó superfícies o varietats de dimensió superior. Així és com apareix la figura de Taube: és una superfície discriminant.

Cavallet de mar (*Seepferdchen*)

$$(x^2 - y^3)^2 = (x + y^2)z^3$$

Singularitats delicades

Contacts subtils

La superfície Cavallet de Mar es replega i s'autointerseca en un únic punt, que és singular. El suau contacte tangencial entre les dues porcions és molt difícil d'aconseguir jugant amb equacions. Es tracta d'una singularitat molt delicada, i qualsevol petita modificació de l'equació destrueix aquest contacte subtil. Canvia l'equació mitjançant SURFER i observa el resultat!

Potser aquesta bella superfície es diu així perquè els cavallets de mar també són animals molt delicats. Només viuen en praderies de posidònia i zones arenoses.

Però la delicadesa d'aquesta singularitat potser és més comparable amb la que presenta la sensitiva (*Mimosa pudica*). És una planta que no permet que la toquin sense canviar de forma: si algú intenta fer-ho, ella, a tall de protecció, tanca les fulles i es col·loca en una posició en què no permet que li mirin l'interior.



Poma (*Dullo*)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$$

Fenòmens singulars a la natura

*Comprendre les singularitats
per planificar*

Les matemàtiques estan molt estretament relacionades amb altres camps del coneixement, com la física, la química o la tecnologia. Proporcionen eines potents per a entendre el món que ens envolta.

Molts dels models que sorgeixen en l'estudi de la natura contenen singularitats, i conèixer-les ajuda a evitar-les o a planificar estratègies per a travessar-les. Així s'esdevé amb el disseny i funcionament de robots.

Un altre exemple és la propagació de les ones de so produïdes per l'ovació del públic en un estadi, que pren la forma de la superfície Poma, amb una singularitat al centre. Per aquesta raó, i per protegir-se les orelles, l'àrbitre de futbol evita posar-se al centre del camp quan el públic celebra un gol.



Espurna (*Distel*)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1500(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) = 1$$

Formes capricioses?

Encaixos singulars

La imatge en blanc i negre sembla una fotografia d'Espurna, però en realitat és la d'un virus. Els virus utilitzen les seves punxes, les singularitats, a manera de claus per a entrar en les cèl·lules, on es poden dividir i créixer.

Una figura és simètrica si hi ha una transformació que la deixa igual. Les simetries d'una figura es poden reconèixer per mitjà de la seva equació. En Espurna, per exemple, qualsevol permutació de les variables de l'equació dóna la mateixa equació i per tant té el mateix aspecte sigui quina sigui la punta que tenim davant.

Estudiant les simetries dels mosaics, els matemàtics van demostrar que només hi ha 17 maneres d'enrajolar una superfície plana. Totes elles ja es troben als murs de l'Alhambra de Granada. Aquest mateix tipus d'investigacions en tres dimensions permet classificar els cristalls i les molècules.



Giroscopi (*Kreisel*)

$$60 (x^2 + y^2) z^4 = (60 - x^2 - y^2 - z^2)^3$$

A través del mirall

El meu altre jo

Una de les simetries més usades en el món literari i místic és l'especular. El nom fa referència als reflexos, per exemple en un llac o en un mirall.

Giroscopi n'és un exemple. Si a sota de la part verda hi hagués un llac, la part blava semblaria el seu reflex. Així és com funciona la simetria especular! Fixa't que en l'equació la variable z només posseeix exponents parells.



Per a molts autors, aquesta simetria ha inspirat un món on l'esquerra és la dreta, els infants són adults i la gent rejoyeneix. Aquesta idea ve de la propietat matemàtica de la simetria especular d'invertir l'orientació. Això ens ho explica la conversa entre l'escriptor L. Carroll, autor d'*Alícia a través del mirall*, i una nena, Alícia:

–Primer vull que em diguis a quina mà tens la taronja.

–A la dreta –va contestar l'Alícia.

–Ara –va dir Carroll– fixa't en el mirall i digues a quina mà té la taronja la nena que hi veus.

–A l'esquerra –va dir l'Alícia.

–I com s'explica això? –li va preguntar Carroll. La nena va dubtar una estona, però a la fi va dir:

–Si em trobés a l'altre costat del mirall, la taronja la tindria encara a la mà dreta, veritat?

–Bravo, petita Alícia! –va exclamar Carroll– És la millor resposta que he rebut fins ara!

Stuart Dodgson Collingwood,
The Life and Letters of Lewis Carroll.

Diàbolo (*Diabolo*)

$$x^2 = (y^2 + z^2)^2$$

La revolució de la revolució

Les superfícies del terrissaire

La porció de la dreta de Diàbolo és simètrica de la porció esquerra. A més a més, sembla que cada porció s'hagi obtingut usant un torn de ceràmica, fent girar una corba parabòlica. Les superfícies que s'obtenen fent girar una corba s'anomenen superfícies de revolució, i la corba que hem fet girar es diu generatriu.

Això mateix li passa al volcà Rangitoto, situat a Auckland (Nova Zelanda), a uns 19.000 km d'aquí: per moltes voltes que facis entorn seu, el paisatge et semblarà sempre igual.

Conec Rangitoto. La gent d'Auckland es girava per veure'l, assenyalar-lo i dir: "Té una forma peculiar; sigui quin sigui l'angle des del qual es miri, és igual; és el lloc més emblemàtic d'Auckland, el seu fenomen". L'observaven i observaven, i no el coneixien, i Grace tampoc no el coneixia, però sí que havia après a assignar-li atributs poètics; la seva uniformitat exterior amaga una sorpresa interior.

Janet Frame, *Towards another Summer*.

Cadascuna de les dues superfícies que formen Diàbolo amaga una sorpresa interior: és un mirall parabòlic, i els reflexos, els raigs de llum paral·lels a l'eix de revolució, es tallen en un punt.

Llima (*Limao*)

$$x^2 - y^3z^3 = 0$$

En el punt d'equilibri

L'egocentrisme de les figures

Una figura té simetria central quan tots els seus punts estan disposats regularment respecte d'un punt, anomenat centre de simetria: cada punt té un punt simètric en la figura a la mateixa distància del centre, en la mateixa direcció però en sentit oposat.

En Llima pots detectar fàcilment quin és el seu centre de simetria. Encara que en aquest cas el centre pertany a la figura, no sempre és així. Si el centre és l'origen de coordenades, la simetria central es descobreix fàcilment en l'equació: substituint (x,y,z) per $(-x,-y,-z)$ ens dóna la mateixa equació.

El concepte de simetria central fa referència a ordre, equilibri, i al fet que hi ha un únic punt que coordina tots els altres. Per això moltes vegades s'utilitza per a simbolitzar l'origen de la vida, el centre de gravetat o dipositari de l'energia, qui és l'amo d'un conjunt de coses, etc. Pots trobar exemples d'aquestes connotacions en molts símbols religiosos.



Cucurutxo (*Eistüte*)

$$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2(z^2 + 1)$$

Seccionar per investigar...

Talls reveladors

Quan volem investigar un objecte, sovint el tallem per la meitat. Una poma sencera té forma rodona i color rogenc, verd o groc, però si volem saber quina forma tenen les llavors i de quin color és per dins, l'haurem de tallar per descobrir-ne l'interior.

Si vols estudiar una figura també la pots tallar i observar quina informació aporten les corbes que obtens. Per exemple, tallant una esfera per qualsevol pla obtens una circumferència. D'aquesta acció de "tallar" se'n diu seccionar.

La mateixa tècnica utilitzen els metges per a fer tomografies, seccionant el cervell per plans paral·lels.

Fixa't que la secció superior de Cucurutxo és en forma de flor. I atesa la semblança que té amb un cucurutxo, si hi poses una bola de gelat damunt, com pots saber si el gelat fos el travessarà i cauran gotes per sota?



Seccionant...

Dansa (*Tanz*)

$$x^4 - x^2 - y^2z^2 = 0$$

Recta que et vull ben recta

Superfícies reglades

Les superfícies reglades són les que es poden generar mitjançant el moviment d'una recta que segueix un recorregut determinat.

Tot i que Dansa no és reglada, conté rectes. Fixa't en dues d'aquestes rectes, que apareixen en la figura aïllades de les restants: els eixos Y, Z. El programa SURFER no permet visualitzar rectes o corbes aïllades. Per veure la corba donada per $f=0$ i $g=0$, es considera l'equació $f^2 + g^2 = 0$, que té les mateixes solucions reals, i es converteix en un tub fi modificant una mica l'equació,

$$f^2 + g^2 - k = 0,$$

per a un valor petit de k .

Molts arquitectes i enginyers decideixen treballar amb superfícies reglades, no solament pel disseny, sinó també pels avantatges de la construcció: proporcionen rigidesa i faciliten l'ús del formigó.

Perquè un objecte sigui altament bell cal que en la forma no hi hagi res de superflu, només les condicions materials que el fan útil; cal tenir en compte el material de què es disposa i els usos que ha de prestar; i d'aquí en naixerà la forma general. Quan les formes són més perfectes, exigeixen menys ornamentació.



Antoni Gaudí

Cor (Hertz)

$$y^2 + z^3 - z^4 - x^2z^2 = 0$$

Mirar els arbres sense deixar de veure el bosc

Estudi local i global de les superfícies

Has vist el pingüí i la tulipa que alguns visitants com tu han dibuixat amb SURFER? Per a aconseguir-ho han hagut de multiplicar diverses equacions, ja que determinar tots els detalls d'una superfície algebraica amb una sola equació, com en Cor, és molt difícil. La unió del “local”, el detall, de tots els punts forma el “global”, la forma, de la superfície.

Aspectes globals d'una superfície són per exemple el grau, el tipus de corbes de les seccions, o saber com està construïda. Aquest és el cas del teorema egregi de Gauss, que afirma que no es pot construir una esfera amb un full de paper sense arrugar-lo o esquinçar-lo.

En canvi, aspectes locals d'una superfície són per exemple saber si hi ha una singularitat en un punt o si el contacte d'una superfície amb una altra al voltant d'un punt és intens o més aviat superficial.

La sèptica de Labs

Les matemàtiques són reptes

Problema obert

T'imagines quin és el màxim nombre de singularitats que pot arribar a tenir una superfície? Segons el grau de l'equació, el nombre màxim de singularitats que es pot aconseguir és diferent.

Aquesta figura, la sèptica de Labs, la va construir Oliver Labs el 2004. Té grau set i és important perquè el seu nombre de singularitats, 99, és el el màxim conegut fins avui.

En efecte, l'any 1982 A. N. Varchenko va demostrar que no es poden obtenir superfícies de grau set amb més de 104 singularitats i, fins ara, ningú no ha arribat més lluny que Labs. Per això la construcció de sèptiques amb 100, 101, 102, 103 o 104 singularitats continua sent un problema obert.



La sèxtica de Barth

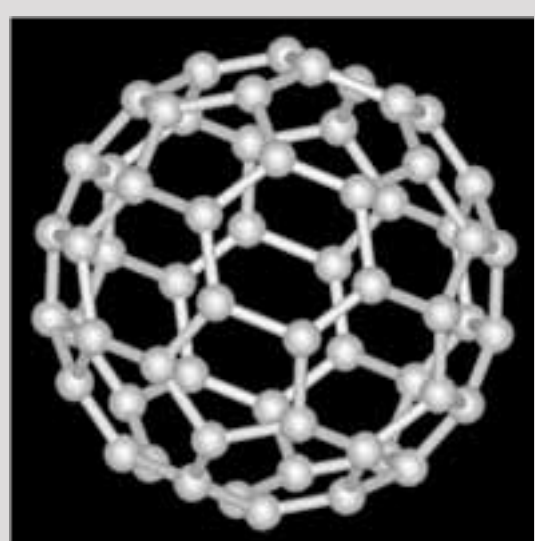
Els Guinness de les singularitats

Rècord per sorpresa

La sèxtica de Barth és una superfície de grau sis construïda el 1996 per Wolf Barth. És remarcable perquè conté el màxim nombre de singularitats que pot haver-hi en un polinomi de grau sis, 65. Però això no es va demostrar fins al 1997! Per a molts geòmetres va significar una gran sorpresa, perquè es pensaven que el màxim era 64.

Hi ha diferents famílies de superfícies amb la propietat de ser un polinomi de grau sis i tenir 65 singularitats. Però la sèxtica de Barth destaca per la seva simetria en forma d'icosaedre.

La forma de la sèxtica de Barth recorda la d'una molècula anomenada ful·lerè. Aquesta molècula és la tercera forma més estable del carboni, junt amb el grafit i el diamant, i s'anomena així en memòria de Buckminster Fuller, el primer matemàtic-arquitecte a "imaginar" aquesta forma.



Miau

$$x^2yz + x^2z^2 + 2y^3z + 3y^3 = 0$$

Tantes superfícies com forats

Són buits, però són importants

En Miau hi ha un enorme forat doble al centre, a través del qual en veiem una de les singularitats. Pot semblar que els forats, com que són buits, no tenen gens d'importància, però de fet ens ajuden a conèixer millor la superfície.

En el cas de superfícies llises fitades i d'una sola peça, el nombre de forats, com el del dònut, fins i tot les classifica. Això és així en l'àmbit de la topologia, on es permet deformar elàsticament la superfície, però no esquinçar-la, enganxar-la o estrangular-la. Així, la superfície d'una tassa de cafè és la mateixa que la d'una rosquilla!

Els forats també tenen importància en altres casos. Depenent de si hi ha bombolles –forats– o no n'hi ha a la cambra magmàtica d'un volcà, l'erupció podrà ser explosiva o només efusiva. El mateix passa amb les bombolles de gas que alliberen els bacteris de la fermentació del formatge emmental: produeixen un formatge ple de forats.



Geisha

$$x^2yz + x^2z^2 = y^3z + y^3$$

Transforma la imaginació en equacions

Art matemàtic

Moltes vegades no és fàcil descobrir les simetries, proporcions, raons àuries... que s'amaguen darrere d'una obra d'art. Això no obstant, hi ha corrents matemàtics que busquen l'art de les matemàtiques, i no l'art amb les matemàtiques.

N'és un exemple l'«art matemàtic», en què els autors fan servir les matemàtiques en les seves obres com un mitjà, sense donar peu a la casualitat, i nombroses vegades juguen amb paradoxes impossibles, com Maurits C. Escher. Un altre artista destacat és Jared Tarbell. Sabies que les obres les realitza amb clics, amb el ratolí, i estan basades en equacions i logaritmes?



I no ho oblidis: tu tens l'última paraula per a decidir si una obra et sembla bella o no. Si, tal com dèiem al començament de l'exposició, cada persona reconeix objectes diferents en veure la mateixa forma, encara és més subjectiu reconèixer la bellesa en allò que observem.

Volva de neu (Schneeflocke)

$$x^3 + y^2 z^3 + y z^4 = 0$$

Les equacions poden ser belles

*Buscar la mateixa bellesa
de diferents maneres*

Segurament, tenim més ganes de dibuixar quan hem vist alguna cosa que ens sembla bella. A vegades és difícil que el dibuix ens deixi satisfets, perquè ja no és tan bell com allò que hem vist. I és que la bellesa se sap amagar molt bé!

En matemàtiques, a la nostra manera, també busquem la bellesa allà on s'amaga, i resulta que un d'aquests llocs són les equacions.

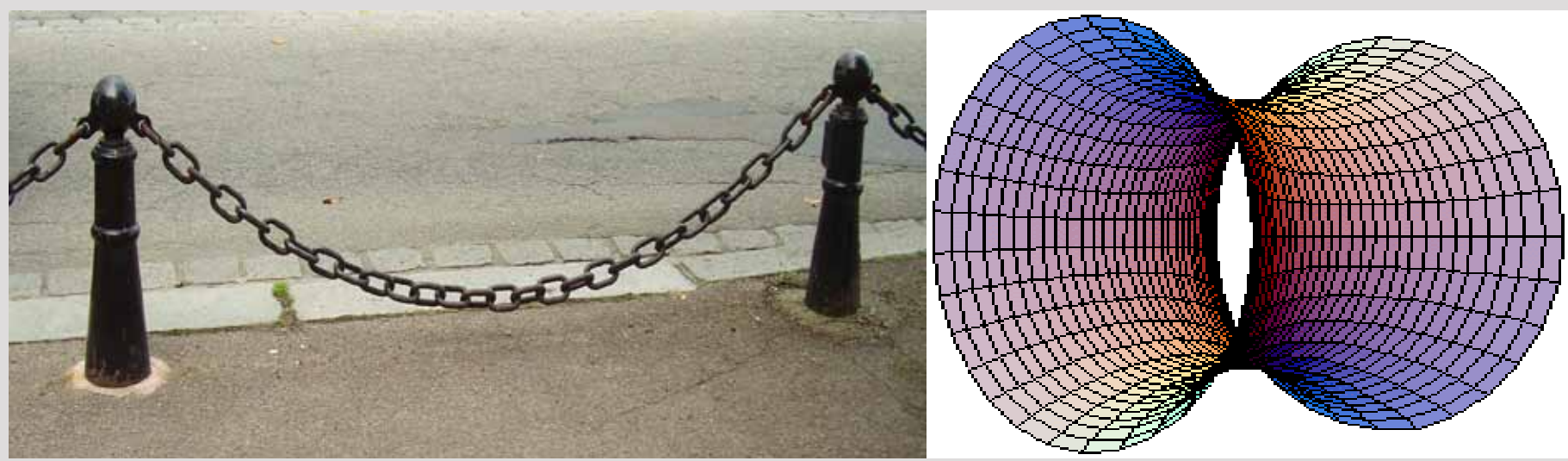
De vegades per trobar una equació que produeixi una superfície bella cal fer molta recerca, assajant amb equacions semblants i entenent els efectes que té cada part de l'equació en el dibuix.

Això passa també amb els fotògrafs, que fan milers de captures abans de tenir un bon enfocament, i amb els pintors, que a vegades omplen un museu amb assajos abans de començar el quadre definitiu. Pintors, fotògrafs, matemàtics... tots fan el mateix de diferents maneres.

Superfícies minimals

Pel·lícules de sabó

Si s'introdueix un filferro corbat i tancat en un líquid sabonós, en treure'l s'obté una pel·lícula. A causa de la tensió superficial del líquid, aquesta pel·lícula és una superfície en equilibri, la qual cosa implica també que és una superfície d'àrea mínima, entre les que tenen la mateixa vora (el filferro). Geomètricament, aquesta propietat és equivalent al fet que la curvatura mitjana H sigui nul·la. Les superfícies amb aquesta propietat s'anomenen superfícies minimals.



Primers exemples: l'helicoide (escala de cargol) i el catenoide (superfície de revolució de la catenària). A més, aquestes dues figures poden ser deformades l'una en l'altra mitjançant una família de superfícies que continuen sent minimals.

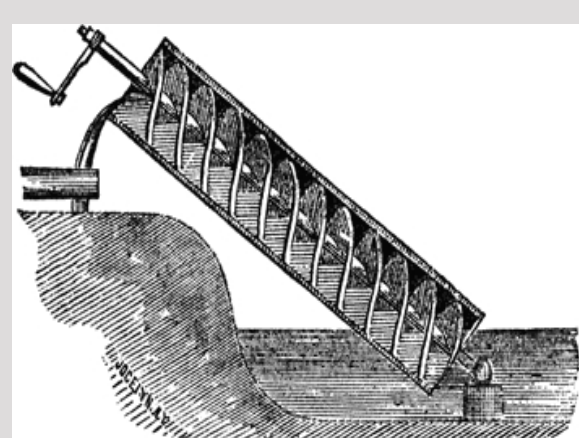
En aquesta imatge (del matemàtic Tim Hoffman) es mostra la discretització d'una superfície minimal intermèdia d'aquesta família. La representació o el dibuix de superfícies utilitzant cercles o discos plans (discretització) és una eina potent en visualització, arquitectura i disseny.

Helicoide

... amb nanses

L'helicoide és la superfície formada per les infinites rectes que uneixen els punts d'una hèlice circular amb els punts del seu eix i són perpendiculars a aquest eix.

És molt habitual en la nostra vida: escales de cargol, femelles, car-



gols, mòbils de vent o els caragols d'Arquimedes. Aquest meca-

nisme, format per un helicoide que gira dins d'un cilindre, s'ha fet servir des de l'antiguitat per a dissenyar màquines destinades a desplaçar



líquids (pujar aigua a un nivell més alt) i sò-

lids (sorra, farina, cereals o cremes). Aquesta forma s'ha usat profusament en arquitectura.

Es pot obtenir com una pel·lícula sabonosa amb un filferro format per una hèlice tancada en unir-la al seu eix. Aquesta imatge, disseny d'Ulrich Pinkall, mostra un helicoide en què s'ha aconseguit connectar els diferents nivells sense trencar la minimalitat de la superfície, ni provocar que la nova superfície es talli a si mateixa.

En matemàtiques, la peça de connexió s'anomena nansa i, segons des d'on la mirem, semblarà un forat al terra, o al sostre, o un tub que connecta els diversos nivells.

Superfície de Björling

Explorant nous territoris

Les superfícies minimals són un model geomètric per a les pel·lícules de sabó i es caracteritzen per tenir curvatura mitjana H nul·la en tot punt de la superfície. Aquestes superfícies constitueixen un camp actiu d'investigació dins la geometria diferencial, amb moltes aplicacions industrials i tecnològiques, i fins i tot artístiques.

Un problema obert és la construcció de nous exemples de superfícies minimals, i també l'obtenció de noves tècniques per a generar-les.

L'any 1844 el matemàtic suec E. G. Björling va demostrar que per a cada corba de l'espai, suficientment bona, es pot construir una banda de superfície minimal al voltant de la corba.

La superfície mostrada aquí (disseny d'Ulrich Pinkall fent ús del programa *jReality*, a partir de les fórmules matemàtiques de Mathias Weber), és una superfície minimal de Björling generada a partir d'una hèlice.

Tetranoide

Bombolles de sabó

El tetranoide pertany a la família de les superfícies amb curvatura mitjana H constant, que són el model geomètric de les bombolles de sabó. Igual que les superfícies minimals, són superfícies en equilibri, però ara la pressió a un costat i a l'altre no és necessàriament igual (per exemple, una gota d'oli en aigua). De la mateixa manera, aquestes superfícies són d'àrea mínima, però entre «les que tanquen un mateix volum».

L'exemple per antonomàsia de superfície amb curvatura mitjana constant és l'esfera (la forma estable de la bombolla de sabó). Un altre exemple és la superfície d'una gota de líquid sobre una superfície plana, que en equilibri tindrà curvatura mitjana constant.

L'estudi d'aquestes superfícies (minimals i de curvatura mitjana constant) és important en situacions en què hi ha contacte entre dos medis (en microbiologia, mescla o separació de substàncies, prospeccions petrolieres...).

El tetranoide és un nou exemple de superfície de curvatura mitjana constant. Ha estat construït de manera que tingui les mateixes simetries que el tetraedre regular.

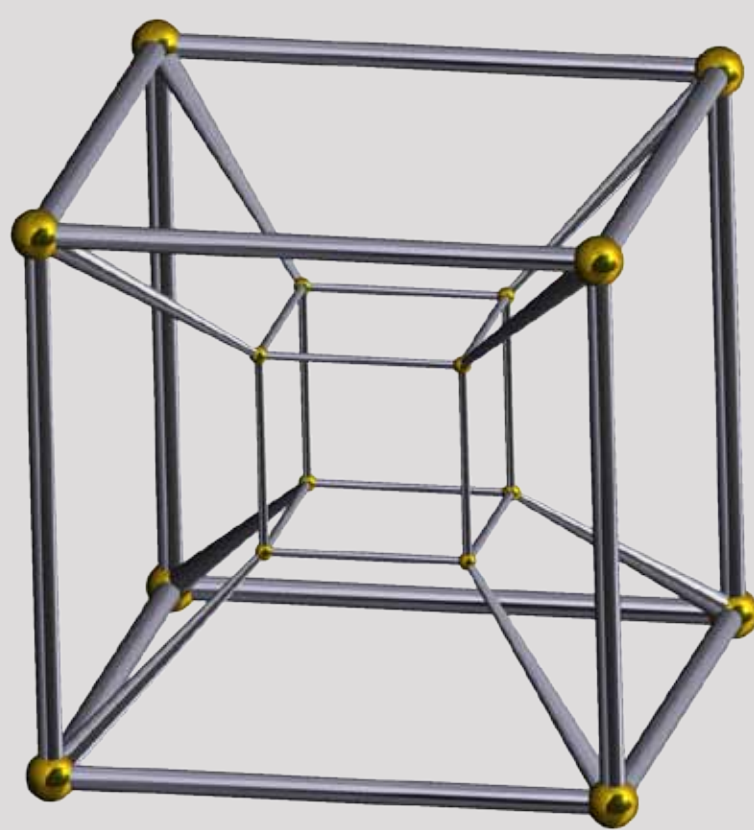
Superfície de Boy

Ombres des de la 4D

L'exemple per antonomàsia de superfície no orientable tancada (sense vora) és el pla projectiu. Aquest objecte forma part de l'anomenada geometria projectiva, iniciada en el Renaixement per a l'estudi de la perspectiva en pintura, i es pot pensar com l'espai de totes les direccions en què els raigs paral·lels de llum poden crear ombres. El pla projectiu és una superfície molt important en matemàtiques, però difícil d'imaginar, ja que només es pot visualitzar en la quarta dimensió (4D).

La superfície de Boy és un model del pla projectiu en el nostre espai tridimensional. S'obté enganxant, a través de les seves vores, un disc i una banda de Möbius. La superfície de Boy es talla a si mateixa.

La versió que es mostra aquí es caracteritza perquè té una curvatura mitjana H tan petita com ha estat possible, és a dir, «no té protuberàncies innecessàries», cosa que en realça la bellesa.



Projecció estereogràfica

L'art de la cartografia

Durant segles, cartògrafs i matemàtics han buscat la manera de projectar la superfície terrestre sobre un pla per obtenir mapes correctes. És a dir, mapes sobre els quals es pugui mesurar correctament la longitud d'un riu, la distància entre dues ciutats, l'abast d'un míssil, la superfície d'un bosc o el rumb d'un viatge en vaixell o en avió.

Malauradament, això no és possible: la curvatura de Gauss K de l'esfera és una constant positiva, mentre que la del pla és nul·la, però hom sap que K s'ha de preservar per transformacions isomètriques (les que generen mapes correctes). Així, si s'intenta aplanar la meitat d'una pilota de goma, aquesta es deformarà (se'n modificaran les distàncies) o s'esquinçarà. Podem concloure, doncs, que tots els mapes són fal·laços en algun sentit.

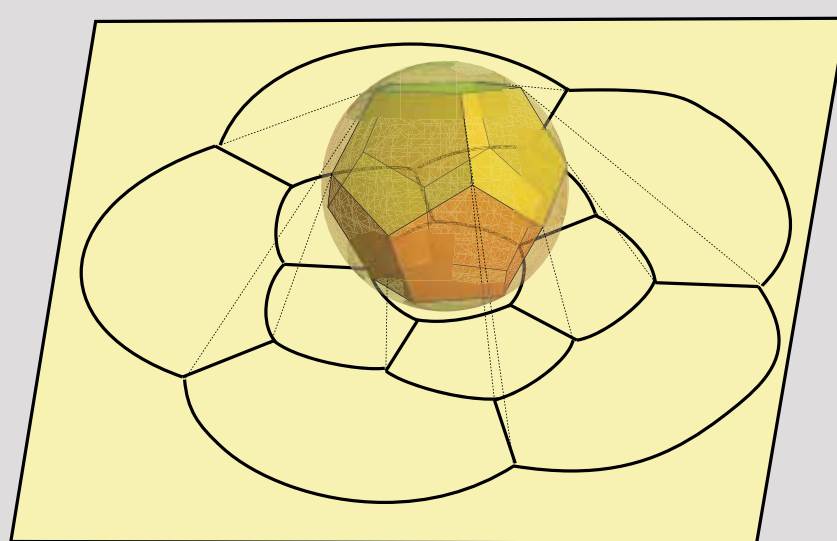
La transformació mostrada en la imatge (una entre centenars de les existents) és la projecció estereogràfica, que projecta els punts de la superfície terrestre des del pol nord sobre el pla tangent al pol sud. Preserva els angles (es diu que és una transformació conforme) i transforma els meridians en rectes que passen pel pol sud i els paral·lels, en circumferències concèntriques.

La 120 cel·la

4D en 3D

La 120 cel·la és un politop regular en dimensió quatre. La 120 cel·la està formada per 120 dodecaedres iguals adossats per les cares (720 pentàgons). Té 600 vèrtexs i 1.200 costats.

Aquest politop és l'anàleg, en dimensió quatre, al dodecaedre en dimensió tres, que té 12 pentàgons regulars iguals adossats pels costats, 20 vèrtexs i 30 costats. Podem imaginar el dodecaedre projectat sobre l'esfera S^2 (recordeu una pilota de futbol) i després sobre un pla mitjançant projecció estereogràfica (figura).



Les imatges corresponents a aquest panell i al següent mostren dos punts de vista diferents de la representació de la 120 cel·la (continguda en l'esfera S^3) en l'espai tridimensional usual.

La corresponent a aquest panell és la seva projecció estereogràfica. S'observa que els dodecaedres estan corbats de manera que els pentàgons són trossos d'esferes i les arestes, trossos de circumferències.

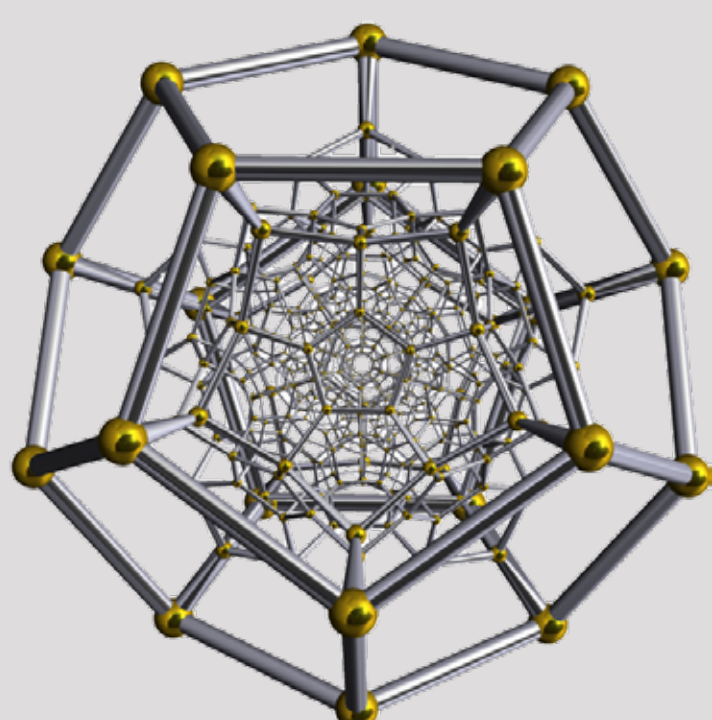
Una altra perspectiva

Futbol en 4D

En la imatge, la 120 cel·la s'ha projectat primerament des del centre sobre l'esfera S^3 que la circumscriu (que podria ser, per analogia amb la figura del text anterior, la pilota de futbol dels habitants de la quarta dimensió), i després se n'ha pres la l'«ombra» en l'espai il·luminant-la des d'un punt situat a certa distància, en direcció perpendicular, del centre d'una de les «cares». La «cara» més pròxima al punt d'il·luminació queda visualitzada com el dodecaedre exterior. La «cara» oposada correspon al dodecaedre més petit en el centre de la imatge.

Com en la imatge anterior, els dodecaedres estan corbats de manera que els pentàgons són trossos d'esferes i les arestes, trossos de circumferències.

La il·lustració mostra com seria l'«ombra» de la 120 cel·la il·luminant-la directament (sense projectar-la abans sobre l'esfera) des d'un punt situat perpendicularment sobre el centre d'una de les «cares».



Possibilitats hiperbòliques

On es pot recobrir l'espai amb dodecaedres

L'espai euclidià ordinari no es pot recobrir (la paraula usada pels matemàtics és *tessel·lar*) amb dodecaedres regulars. Aquest fet és anàleg al que passa en un pla euclidià, que si bé es pot tessel·lar amb triangles equilàters, quadrats i hexàgons regulars, en canvi no és possible fer-ho amb pentàgons regulars (ja que l'angle interior en un vèrtex del pentàgon regular és 108° , que no divideix 360°).

Però hi ha plans i espais anomenats hiperbòlics que es poden tessel·lar amb pentàgons i dodecaedres regulars, respectivament.

Això és possible perquè aquests espais tenen «curvatura», cosa que comporta, per exemple, que hi ha pentàgons regulars els angles interiors dels quals són rectes, i aquests pentàgons «s'enganxen» tan bé en el pla hiperbòlic com els quadrats en el pla euclidià.

La figura representa la tessel·lació amb dodecaedres regulars de l'espai hiperbòlic, els quals «s'enganxen» tan bé com els cubs en l'espai euclidià.

Connexions inesperades

Pot l'aritmètica prescindir dels sistemes dinàmics?

L'aritmètica estudia els nombres; la geometria i la topologia estudien les formes; la dinàmica estudia el moviment, el canvi de les configuracions amb el pas del temps.

Una descripció d'aquest estil podria fer pensar que les fronteres entre aquests dominis estan ben definides i que entre l'un i l'altre hi ha poca interacció. Això no obstant, de fet es constata tot el contrari, és a dir, entre els diferents dominis de les matemàtiques hi ha profundes interconnexions.

La imatge il·lustra un cas eloqüent.

Aquesta topologia embullada és una visualització d'un flux d'Anosov. Més concretament, és el flux d'un dels sistemes dinàmics «modulars», que resulten fonamentals per a l'estudi dels nombres enters, i en particular dels nombres primers.

Filant més prim

Matemàtica...

no n'hi ha més que una!

Una altra imatge bella d'un flux modular relacionat amb el nus Trèvol.

Per a una introducció als sistemes dinàmics modulars i la seva relació amb la teoria de les corbes el·líptiques i la teoria de nombres, es pot consultar el magnífic article [+].

El seu subtítol,

A tangled tale linking lattices, knots, templates, and strange attractors . . .

[Una història en què s'entrellacen reticles, nusos, plantilles i atractors estranys...]

apunta al fet, com una més entre innombrables mostres, que en la «realitat matemàtica» tot està íntimament interconnectat, i que en gran manera l'ofici matemàtic, per no dir-ne art, té per objectiu posar de manifest noves connexions, nous camins que uneixen inesperadament els conceptes.

[+] Étienne Ghys, Jos Leys: *Lorenz and Modular Flows: A Visual Introduction*. Monthly Essays on Mathematical Topics, American Mathematical Society, 2006.

Conques de Wada

... o les esferes del Guggenheim

Aquesta bella imatge, creada per Richard Palais i Luc Benard, és una reproducció per ordinador dels resultats de certs experiments de «dispersió caòtica», que es produeix en el trànsit d'una partícula per una «regió dispersant». L'estudi d'aquest fenomen té aplicacions a la dinàmica de fluids, la cosmologia, la termodinàmica, la mecànica celeste i la física de partícules.

La configuració bàsica d'aquesta imatge està formada per quatre boles idèntiques i molt reflectores col·locades formant un tetraedre i de manera que cada bola toqui les altres tres, és a dir, a la manera en què el fruiter col·loca les taronges. Si es mira en el buit entre tres boles, les imatges reflectides que es veuen formen un fractal tridimensional. Aquest experiment es pot fer a casa amb quatre boles de Nadal reflectores.

L'obra «El gran arbre i l'ull» (2009) de l'escultor Anish Kapoor, a l'exterior del Museu Guggenheim de Bilbao, és una versió lliure –i amb múltiples esferes lluent que es reflecteixen les unes en les altres– de l'efecte de les conques de Wada.

Natura morta

Cinc superfícies de vidre sobre una taula

Seguint la tradició de les «natures mortes» (bodegons) de la història de l'art, el matemàtic Richard Palais i l'artista gràfic Luc Benard han creat aquesta obra en què els objectes són superfícies matemàtiques.

Les superfícies d'aquest bodegó tenen propietats geomètriques destacables, a més del seu interès històric, però han estat escollides sobretot per la seva bellesa. Són, de baix a esquerra i en el sentit de les agulles del rellotge: l'ampolla de Klein (superfície no orientable, d'una sola cara), el 4-noide simètric (superfície minimal), la superfície pseudoesfèrica de tipus polsant (exemple de superfície amb una geometria no euclidiana, de tipus hiperbòlic, $K < 0$), la superfície de Boy (superfície no orientable) i la superfície de Sievert-Enneper (exemple de superfície amb una geometria no euclidiana, de tipus el·líptic, $K > 0$).

Aquesta composició va ser guardonada amb el primer premi del Concurs de Visualització en Ciència i Enginyeria de la revista *Science* i la National Science Foundation dels EUA.