

*Islamische Flechtwerksornamentik
mit Bezug zu quasikristallinen
Wachstumsmodellen
Kapitel I-V*

*An Islamic Wickerwork Decoration
with Correlations to Quasicrystal
Growth Models
Chapters I-V*

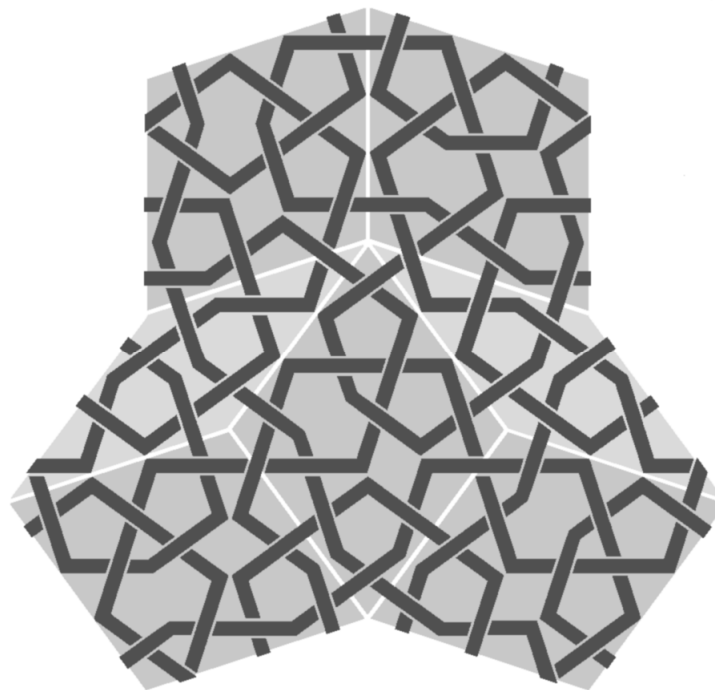
*Ausführliches Textheft zur
großen Flechtwerksgrafik*

*Description booklet of the
large wickerwork graphic*

Zur Erforschung atomarer Strukturen bedarf es geometrischer Studien. Dabei sind gelegentlich die Arbeiten von Künstlern hilfreich. In der vorliegenden Arbeit werden die Beziehungen zw. mittelalterlichen, islamischen Ornamenten und quasikristallinen Atommodellen untersucht. Diese Beziehungen überraschen, insbesondere, da die Existenz von Quasikristallen vor ihrer Entdeckung 1982 für unmöglich gehalten wurde.

Abbildung:

Flechtwerkmuster
eingepasst in eine
Elementarzelle
des Rhomben
Modells von
R. Penrose



Picture:

wickerwork
decoration
adapted to the
unit cell of the
rhomb tiling of
R. Penrose

The research of nuclear structures deserves geometrical studies. In this connection, occasionally the works of artists are assistant. In the present work, the correlations of medieval Islamic ornaments and quasicrystalline atomic models are investigated. These correlations are surprising, especially because the existence of quasicrystals were considered impossible before they were discovered in 1982.



1982 entdeckte D. Shechtman erstmalig eine atomare Struktur mit fünfzähligen Drehsymmetrie ^[1]. Diese Entdeckung, die 2011 mit dem Nobelpreis gewürdigt wurde, widersprach dem damals gültigen kristallografischen Grundsatz, dass geordnete atomare Strukturen immer periodisch wie ein Kristall aufgebaut sein müssten.

Zum Beispiel ist die Atomstruktur eines Quarzkristalls einer Bienenwabe ähnlich. Man kann die Wabenstruktur durch (gedachte) Verschiebungen in sich selbst überführen. Desweiteren erscheint die Struktur nach jeder 60°-Drehung um den Mittelpunkt einer beliebigen sechseckigen Wabenzelle unverändert, d. h., jeder Zellenmittelpunkt ist das Zentrum einer sechszähligen Drehsymmetrie ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$).

Es existiert dagegen keine Struktur mit einer vergleichbar aufgebauten fünfzähligen Drehsymmetrie. Allerdings wurden schon 1973 von Roger Penrose quasiperiodische (fast periodische) Strukturen erdacht, die eine angenäherte fünfzählige Drehsymmetrie besitzen, jedoch keinerlei Verschiebungssymmetrie aufweisen ^{[4][5][6]}.

Eine natürliche quasiperiodische Erscheinung ist das Zusammenspiel von Sonne, Erde und Mond, sowie die Bewegung der Planeten in unserem Planetensystem.

Im Gegensatz zu der periodischen Bewegung der Zeiger einer Uhr, kehrt in unserem Planetensystem keine Planetenkonstellation jemals wieder. Die Ursache dafür sind die irrationalen (die nicht ganzzahligen) Verhältnisse der Planetenumlaufzeiten.

In fünf- bzw. zehnzählig drehsymmetrischen Geometrien ist ebenso eine irrationale Zahl für die Quasiperiodizität verantwortlich, der Goldene Schnitt: $\tau = 1,6180339\dots$

Er entspricht dem Längenverhältnis einer Fünfeck-Diagonalen zu einer Fünfeck-Seite. Quasiperiodisch geordnete atomare Strukturen nennt man „Quasikristalle“. Das Foto oben (AMES lab.) zeigt einen synthetisch hergestellten ikosaedrischen Quasikristall. 2009 entdeckte P. Steinhardt den ersten natürlich gewachsenen Quasikristall.

I. Quasiperiodicity of Quasicrystals



In 1982, D. Shechtman discovered for the first time a nuclear structure with fivefold rotational symmetry ^[1]. This discovery – in 2011 honored with the Nobel-prize – was in contradiction to the crystallographic credo at that time which said that ordered nuclear structures must have periodical order like crystals.

For example, the nuclear structure of a quartz crystal is similar to the order of a honeycomb. Mentally, you can cover the honeycomb structure with itself by parallel translations. Further the honeycomb structure doesn't change its shape by 60°-rotations about the center of a free selectable hexagonal cell, i. e., each cell center is the center of a sixfold rotational symmetry ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$).

In contrast, a structure with a comparably composed fivefold rotational symmetry doesn't exist. Nevertheless, previously in the year 1973, Roger Penrose developed quasiperiodical (nearly periodical) structures with a perfect approximation to a fivefold rotational symmetry, but without any translational symmetry ^{[4][5][6]}.

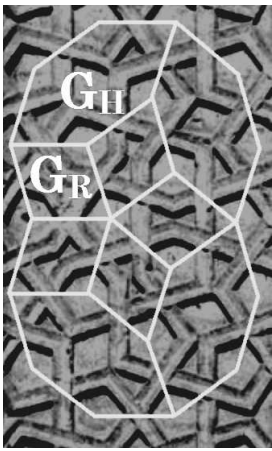
A natural, quasiperiodical phenomenon is the interplay of sun, earth and moon, as well as the movement of the planets in our planetary system.

Compared to the periodical movements of the clock hands, the constellations of the planets in our planetary system never recur. This property of the planetary system originates from the irrational (not integer) ratios of the orbital periods.

In geometries with fivefold resp. tenfold rotational symmetry the real cause of quasiperiodicity is an irrational number too – the golden ratio: $\tau = 1,6180339\dots$

This number is the ratio of the diagonal length of a pentagon to its edge length.

Quasiperiodically ordered nuclear structures are called “quasicrystals”. The photo at the top (AMES lab.) shows a synthetically generated icosahedral quasicrystal. In 2009, P. Steinhardt discovered for the first time a naturally grown quasicrystal.



Seit dem 10. Jh. zeichnet sich die sakrale Baukunst im islamischen Kulturkreis zunehmend durch die Verwendung geometrischer Muster aus, motiviert durch die religiöse Ablehnung der Darstellung des Menschen. Das Foto links (patterninislamicart.com) zeigt ein Flechtwerk aus Stein an der Hunat Hatun Moschee in Kayseri, Türkei (ca. 1250), das mit den Girih-Schablonen G_H und G_R konstruiert worden ist ^{[2][3]}. Die Indizes beziehen sich auf Hexagon und Rhombus.

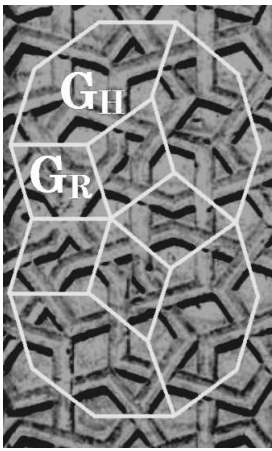
Am Darb-i Imam Schrein^[2] in Isfahan, Iran (ca. 1450), sind Girih-Ornamente zu sehen, zu deren Entwurf fünf unterschiedliche Girih-Schablonen verwendet wurden. Ebenso wie G_H und G_R sind alle nur mit Vielfachen des 36° -Winkels konstruiert.

Einige dieser Ornamente besitzen eine Besonderheit: In die Bausteine eines übergeordneten Musters ist ein feinteiligeres Muster eingepasst worden. Dieser hierarchische Aufbau verteilt die Bausteine des feinteiligeren Musters so gleichmäßig, dass sie in den fünf möglichen Orientierungen etwa gleich häufig vorkommen.

Aufgrund dieser Eigenschaften haben die Ornamente am Darb-i Imam Schrein eine gewisse Ähnlichkeit mit einer fünfzählig drehsymmetrischen quasikristallinen Struktur.

Das Girih-Flechtwerk G_z° im Vordergrund der großen Grafik besitzt eine perfekte quasiperiodische Struktur. Die Quasiperiodizität wurde dadurch erreicht, dass die Girih-Schablonen G_H , G_R und G_B (der Index B stammt von "bowtie", dt. Fliege) in die Rhomben R_r und R_s eines modernen Penrose-Parketts^[4] eingepasst wurden.

Die quasiperiodische Ordnung der Penrose-Rhomben kann auf unterschiedliche Weise erzeugt werden.



Since the tenth century, the ecclesiastical architecture in the Islamic cultural area is characterised more and more by the application of geometric patterns, motivated by the religious renunciation of human images. The photo on the left (patterninislamicart.com) shows a wickerwork, carved in stone, at the Hunat Hatun Mosque in Kayseri, Turkey (c. 1250), which was constructed with the girih tiles G_H and G_R ^{[2][3]}. The indices refer to hexagon and rhombus.

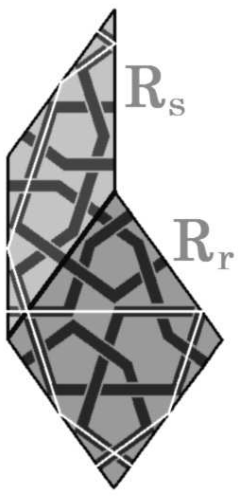
At the Darb-I Imam Shrine^[2] in Isfahan, Iran (c. 1450), we can find girih ornaments which were composed by five diverse girih tile types. Just as G_H and G_R , all of them are designed with multiples of the 36° -angle.

Some of these ornaments have a special feature: In the interior of the tiles of a superordinate pattern a small-sized pattern is integrated. This hierarchical composition provides a measured distribution of the small-sized tiles with a nearly uniform percentage of the five possible orientations.

Due to these properties the ornaments at the Darb-I Imam Shrine are, to a certain extend, similar to a quasicrystalline structure with fivefold rotational symmetry.

The girih wickerwork G_z° in the foreground of the large graphic has a perfect quasicrystalline structure. The quasiperiodicity is forced by integration of the girih tiles G_H , G_R and G_B (the index B refers to the shape of a bowtie) into the rhombic tiles R_r and R_s of a modern Penrose tiling ^[4].

Different ways are known to create the quasiperiodical order of the Penrose rhombs.



1973 entwickelte der britische Astrophysiker und Mathematiker Sir Roger Penrose die ersten quasiperiodischen Parkette, die eine sehr gut angenäherte fünffache Drehsymmetrie aufwiesen ^[4].

Von seinen drei unterschiedlichen, aber untereinander verwandten Parketten hat das Rhomben-Parkett die größte Bedeutung erlangt. Das Parkett besteht aus den dicken Rhomben R_r (spitze Winkel 72°) und den schmalen Rhomben R_s (spitze Winkel 36°). Die fünfzählige Drehsymmetrie wird durch „Anlegeregeln“ erzwungen.

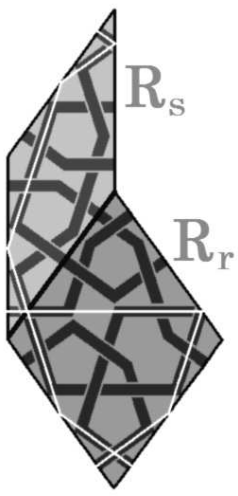
In der Abbildung oben wurden in die Rhomben R_r und R_s das dunkelgraue Girih-Flechtwerk und die weißen r -Linien, die sogenannten Ammann-Linien, eingezeichnet. Die Anlegeregeln fordern die widerspruchsfreie Fortsetzung all dieser Linien.

Die Anlegeregeln der Penrose-Parkette sind jedoch unvollständig, d. h., das Anlegen wird auch unter Einhaltung der Regeln zu Konstellationen führen, die regelkonform nicht mehr fortgeführt werden können.

Bei der alternativen Substitutionsmethode wird jeder Rhombus durch eine ganz bestimmte Anordnung verkleinerter Rhomben ersetzt. Die mehrmalige Anwendung dieses Verfahrens führt zu (beliebig) großen, fehlerfreien Anordnungen oder Zellen. Diese Zellen können ihrerseits aneinander gelegt bzw. überdeckt werden.

Das Girih-Flechtmuster G_z^o im Vordergrund der großen Grafik ist durch eine solche kombinierte Methode erzeugt worden.

Ein realistisches quasikristallines Wachstumsmodell kann nicht ausschließlich auf der Substitutionsmethode beruhen, da diese Methode dem schrittweisen Wachstum einer atomaren Struktur nicht entspricht.



In 1973, the british astrophysicist and mathematician Sir Roger Penrose developed the first quasiperiodic tilings with a nearly perfect approximation to a fivefold rotational symmetry ^[4].

There are three different but connatural Penrose tilings. The most famous one is the rhomb Penrose tiling.

This tiling is made of thick rhombs R_r (acute angle 72°) and skinny rhombs R_s (acute angle 36°). The fivefold rotational symmetry is forced by the “matching rules”(edge-to-edge rules).

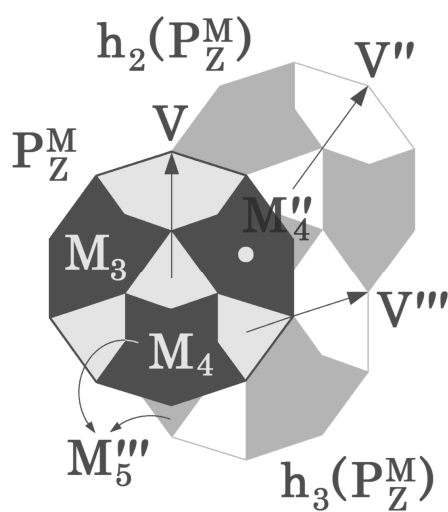
The picture at the top shows the rhombs R_r and R_s , in which the dark grey girih wickerwork and the white r -lines, commonly known as Ammann-lines, are drawn in. The matching rules force the consistent continuation of all these lines.

However, the matching rules of the Penrose tilings are incomplete, i. e., the regular connection of the tiles will lead to constellations which cannot be continued in accordance to the matching rules.

An alternative method is to substitute each rhombus by a special constellation of down-scaled rhombs. The iterated application of this method leads to (unlimited) large and flawless configurations resp. cells. These cells can be connected or covered on their part.

The girih wickerwork G_z^σ in the foreground of the large graphic is generated in such a way, combining both methods.

A realistic model of quasicrystalline growth cannot be found exclusively on the substitution method, because this method doesn't agree with the step-by-step growth of a nuclear structure.



Das Rhomben-Penrose-Parkett ist für ein quasikristallines Wachstumsmodell wegen der Unvollständigkeit seiner Anlegeregeln und wegen seiner zwei elementaren Formen nicht optimal geeignet.

1995 schlug Petra Gummelt ein System vor, deren einzige elementare Formen Zehnecke (Dekagone) sind [5].

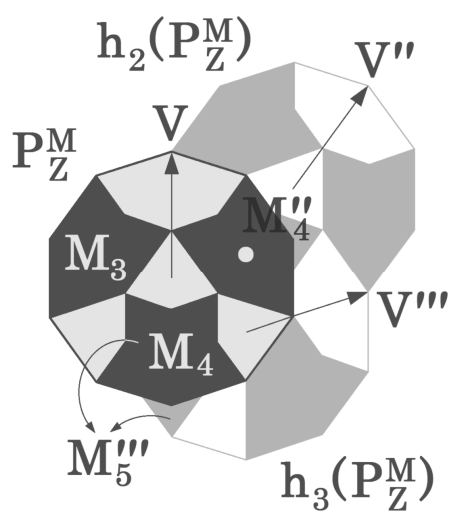
Die Dekagone (abgekürzt: P^M) haben Überlappingsregeln, die nur quasiperiodische Überdeckungen zulassen.

Die Abbildung oben zeigt das Gummelt-Dekagon P^M_Z aus der Mitte der großen Grafik mit den hellgrau dargestellten überdeckenden Dekagonen $h_2(P^M_Z)$ und $h_3(P^M_Z)$.

Im Inneren jedes Gummelt-Dekagons P^M sind jeweils drei Teilmengen eingezeichnet, zwei "Raketen" M_3 und ein "Halbsterne" M_4 . Die mit einem Punkt gekennzeichnete rechte Rakete von P^M_Z wird von dem Halbsterne M_4'' des Dekagons $h_2(P^M_Z)$ vollständig überdeckt. Umgekehrt aber wird dieser Halbsterne von der Rakete nur unvollständig überdeckt. Für eine vollständige Überdeckung muss der außerhalb des P^M_Z -Dekagons gelegene Halbsternezacken durch die linke Rakete von $h_3(P^M_Z)$ überdeckt werden.

Die fünfzählig drehsymmetrische Form des Sterns M_5''' wird durch die Überdeckung der Halbsterne von $h_3(P^M_Z)$ und von P^M_Z erzeugt. Zur vollständigen Überdeckung von M_5''' werden jedoch mindestens drei Halbsterne benötigt.

Das Girih-Flechtwerk G^{σ}_Z im Vordergrund der großen Grafik besteht aus nur drei Sorten geschlossener Knoten, wie z. B. K_3 , K_4'' und K_5''' , die überraschenderweise den P^M -Teilmengen M_3 , M_4'' und M_5''' eindeutig zugeordnet werden können.



The rhomb Penrose tiling isn't qualified at its best for a quasicrystalline growth model. The reasons are on the one hand the incompleteness of the matching rules and on the other hand the two elementary rhombic shapes.

In 1995, Petra Gummelt proposed a system with regular decagons as the only kind of elementary shape [5].

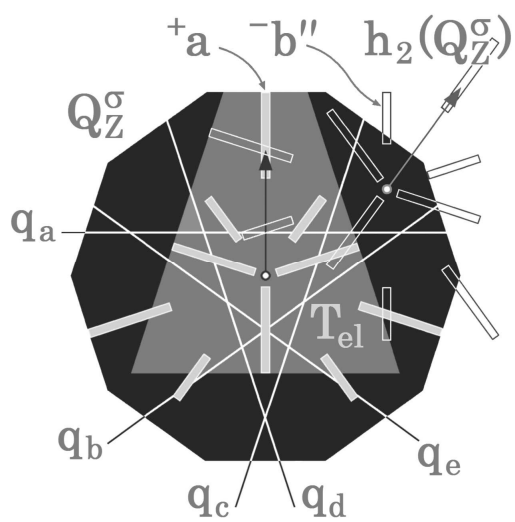
The decagons (abbreviated with P^M) have overlap rules which lead to quasiperiodical coverings.

The picture at the top shows the Gummelt-decagon $P_{\frac{M}{Z}}$ from the center of the large graphic with the covering decagons $h_2(P_{\frac{M}{Z}})$ and $h_3(P_{\frac{M}{Z}})$, marked in light grey.

Inside of the Gummelt-decagon $P_{\frac{M}{Z}}$ three subsets are drawn in, two "rockets" M_3 and one "halfstar" M_4 . The rocket on the right-hand side of $P_{\frac{M}{Z}}$ is marked with a point. This rocket is completely covered by the halfstar M_4'' of the decagon $h_2(P_{\frac{M}{Z}})$. Vice versa, the covering of the halfstar by the rocket is not complete. For a complete covering, the V-shaped part of the halfstar, which lies outside of the $P_{\frac{M}{Z}}$ -decagon, must be covered by the left-hand side rocket of $h_3(P_{\frac{M}{Z}})$.

The shape of the star M_5''' has a fivefold rotational symmetry. This shape is generated by the covering of the halfstars of $h_3(P_{\frac{M}{Z}})$ and of $P_{\frac{M}{Z}}$. However, a complete covering of the starlike shape of M_5''' depends on not less than three halfstars.

The girih wickerwork $G_{\frac{Z}{2}}^{\sigma}$ in the foreground of the large graphic is created by only three kinds of closed knots, such as K_3 , K_4'' and K_5''' . Surprisingly, these knots clearly correlate with the P^M -subsets M_3 , M_4'' and M_5''' .



Leider sind die Überdeckungsregeln der Gummelt-Dekagone ebenso unvollständig wie die Anlegeregeln der verwandten Penrose-Parkette.

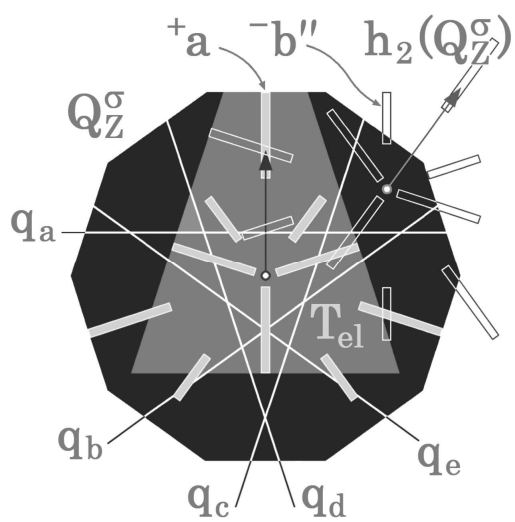
2006 stellte der Autor die „Quasiperiodische Sukzession“ [6] vor. Diese Wachstumsregel steuert die Überdeckungen von Quasizellen Q^σ . Durch die Umrechnung von jeweils fünf Skalenwerten a, b, c, d und e von jeder Zelle auf ihre Nachbarzellen werden Fehlbelegungen ausgeschlossen.

Die Abbildung oben zeigt die dekadonale Quasizelle Q_z^σ . Die hellgrau gefüllten Balken sind die steuernden Doppelskalen $^+a, ^+b, ^+c, ^+d, ^+e$ der Quasizelle Q_z^σ . Rechtwinklig zu jeder Doppelskala sind die entsprechenden Ammann-Linien höherer Ordnung, q_a, q_b, q_c, q_d und q_e , eingezeichnet. Das graue Trapez T_{el} zeigt den elementaren Bereich der Quasizelle Q_z^σ . Die Längen der Pfeile entsprechen denen in den Gummelt-Dekagonen, d. h., die Quasizellen Q^σ sind größer als die Gummelt-Dekagone P^M .

Die gerahmten Balken sind die Doppelskalen der überdeckenden Quasizelle $h_2(Q_z^\sigma)$. Die vertikal orientierte gerahmte Skala $^-b''$ der Quasizelle $h_2(Q_z^\sigma)$ und die parallele gefüllte Skala ^+a der Quasizelle Q_z^σ sind korrespondierende Partner.

Im oberen Teil der großen Grafik wird gezeigt, wie zwischen den beiden parallelen Doppelskalen deren Werte übertragen und umgerechnet werden können: $b'' = 1 - a$

Die geometrischen Übereinstimmungen des Girih-Flechtwerks G_z^σ mit den Ammann-Linien und den Doppelskalen der Quasizelle Q_z^σ zeigen deutlich die universellen Eigenschaften der historischen Girih-Schablonen G_H, G_R und G_B .



Unfortunately, the overlap rules of the Gummelt-decagons are as incomplete as the matching rules of the connatural Penrose tilings.

In 2006, the author presented a growth rule called the „Quasiperiodic Succession” [6]. This growth rule regulates the coverings of quasi-cells Q^σ . The conversion of five scale values a, b, c, d and e from each cell to its neighbour cells controls a flawless covering process.

The picture at the top shows the decagonal quasi-cell Q_z^σ . The bars filled with light grey are the controlling twin-scales $^{\pm}a, ^{\pm}b, ^{\pm}c, ^{\pm}d, ^{\pm}e$ of the quasi-cell Q_z^σ . Rectangular to each twin-scale the respective Ammann-lines of higher order, q_a, q_b, q_c, q_d and q_e , are drawn in. The grey marked trapezoid T_{el} is the elementary area of the quasi-cell Q_z^σ . The lengths of the arrows correspond with the lengths in the Gummelt-decagons, i. e., the quasi-cells Q^σ have a larger size than the Gummelt-decagons PM .

The framed bars are the twin-scales of the covering quasi-cell $h_2(Q_z^\sigma)$. The vertically orientated framed scale $^{-}b''$ of the quasi-cell $h_2(Q_z^\sigma)$ and the parallel filled scale ^{+}a of the quasi-cell Q_z^σ are corresponding partners.

In the upper region of the large graphic is shown in which way the scale values of the both parallel twin-scales get transferred and converted: $b'' = 1 - a$

The geometrical accordance of the girih-wickerwork G_z^σ with the Ammann-lines and the twin-scales of the quasi-cell Q_z^σ clearly demonstrate the universal character of the historical girih tiles G_H, G_R and G_B .

Literaturverzeichnis / References

- [1] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, *Physical Review Letters* **53**, p. 1951 – 1953 (1984)
- [2] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture*, *Science* **315**, p. 1106 – 1110 (23 Feb. 2007)
- [3] P. Cromwell, *The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-fold Ornaments*, *Mathematical Intelligencer*, Volume 31, **1**, p. 36 – 56 (2009)
- [4] Roger Penrose, *Pentaplexity. A Class of Non-periodic Tilings of the Plane*, *Mathematical Intelligencer*, Volume 1, **2**, p. 32 – 37 (1979)
- [5] Petra Gummelt, *Penrose Tilings as Coverings of Congruent Decagons*, *Geometriae Dedicata*, **62**, p. 1 – 17 (1996)
- [6] Uli Gaenshirt and Michael Willsch, *The Locally Controlled Growth of a Perfect Cartwheel-Type Tiling Called the Quasiperiodic Succession*, *Philosophical Magazine*, Volume 87, **18 – 21**, p. 3055 – 3065 (July 2007)

Kontakt / Contact

© 2012 Uli Gaenshirt, Nürnberg, Deutschland / Nuremberg, Germany

uli.gaenshirt@yahoo.de

