

IMAGINARY

open mathematics



IMAGINARY begann 2008 als interaktive Wanderausstellung, die auf attraktive und verständliche Weise Visualisierungen, interaktive Installationen, virtuelle Welten, 3D-Objekte und ihre mathematischen Hintergründe präsentiert. Im Laufe der letzten Jahre hat sich diese Ausstellung zu einer Open Source Plattform (www.imaginary.org) für interaktive Mathematikvermittlung weiterentwickelt.

Das Ziel der Plattform »IMAGINARY–open mathematics« ist es, einen Ort für die Präsentation und Entwicklung von Mathematikausstellungen anzubieten. Hier werden alle IMAGINARY-Inhalte einem breiten Publikum unter einer freien Lizenz zur Verfügung gestellt und können so leicht für eigene Ausstellungen und Veranstaltungen verwendet werden. Darüber hinaus bietet die Plattform allen Benutzerinnen und Benutzern die Möglichkeit, eigene Inhalte einzubringen, und dient so als Basis für den Austausch der sich in den letzten Jahren verstärkenden Mathematikvermittlung. Die Zielgruppe der Plattform sind neben Museen und Universitäten auch Schulen, für die ein spezielles IMAGINARY-Paket entwickelt wurde, das auf die Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler zugeschnitten ist.

Die Plattform stellt momentan zwei Ausstellungen zur Verfügung: Die ursprüngliche Ausstellung »IMAGINARY – mit den Augen der Mathematik«, aus der das ganze Projekt hervorgegangen ist, und die Ausstellung »Mathematik des Planeten Erde«, die aus Anlass der weltweiten Initiative »Mathematik des Planeten Erde« (MPE) entwickelt wurde.

»IMAGINARY – mit den Augen der Mathematik« wurde vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach entwickelt und 2008–2009 durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) unterstützt. Von 2011–2016 wird IMAGINARY durch die Klaus Tschira Stiftung gefördert. Die Ausstellung wurde in über 120 Städten in 25 Ländern veranstaltet, und es gibt inzwischen sogar einige permanente Installationen, z.B. im Deutschen Museum in München und im Museum of Mathematics (MoMath) in New York. Ihr didaktisches und ästhetisches Konzept begeistert die Besucherinnen und Besucher für Mathematik und weckt Neugier auf die Theorie dahinter: durch visuelle Eindrücke, Live-Interaktion sowie mittels Führungen und persönlicher Betreuung vor Ort.

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) gilt in der Mathematik als eines der renommiertesten Institute seiner Art. Es wird jedes Jahr von etwa 2.500 Mathematikerinnen und Mathematikern aus aller Welt besucht, die es als Tagungs- und Forschungseinrichtung nutzen. Bei Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern ist es als eine Institution geschätzt, die durch den hohen internationalen Standard ihres Workshop- und Forschungsprogramms Maßstäbe gesetzt hat.



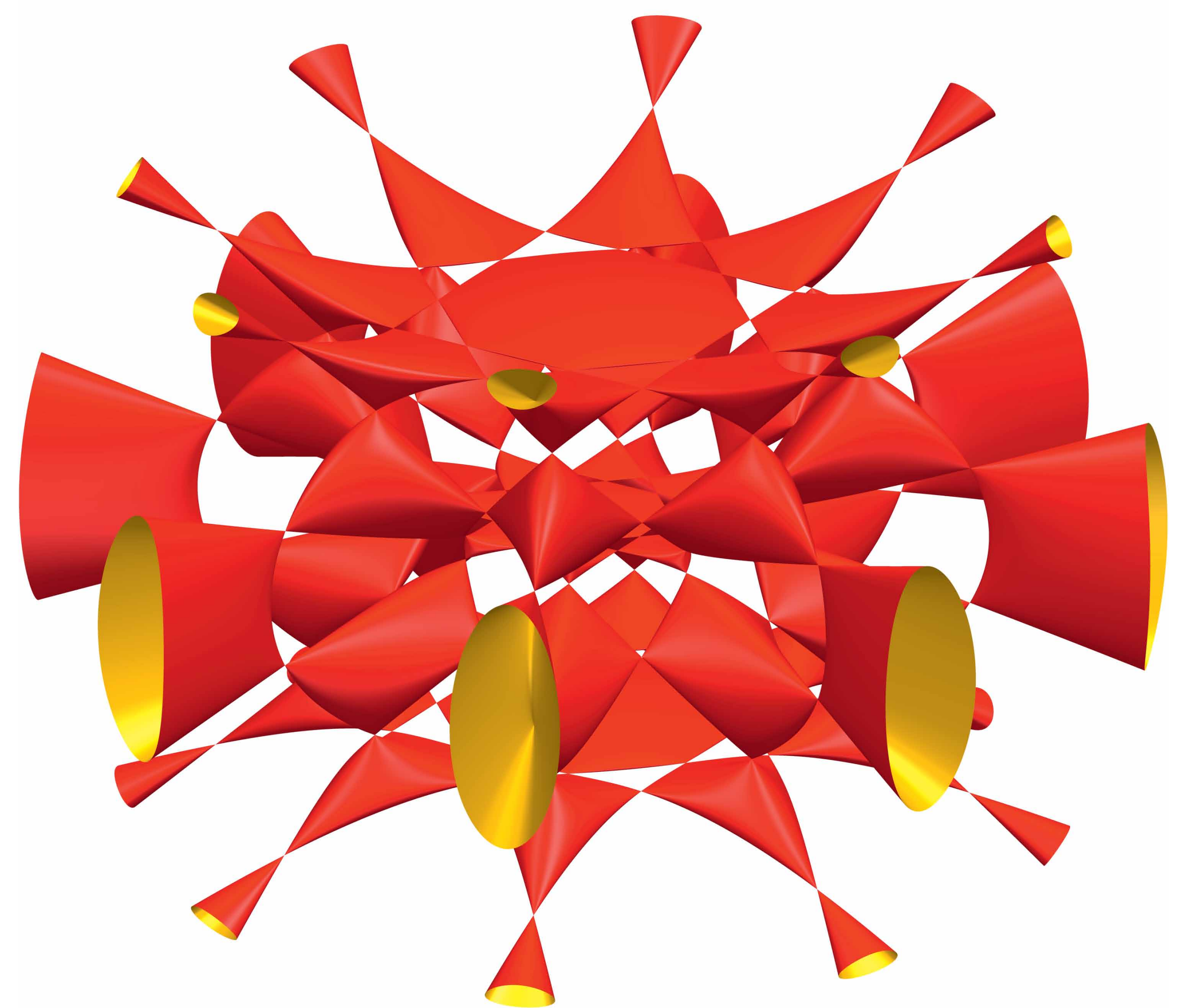
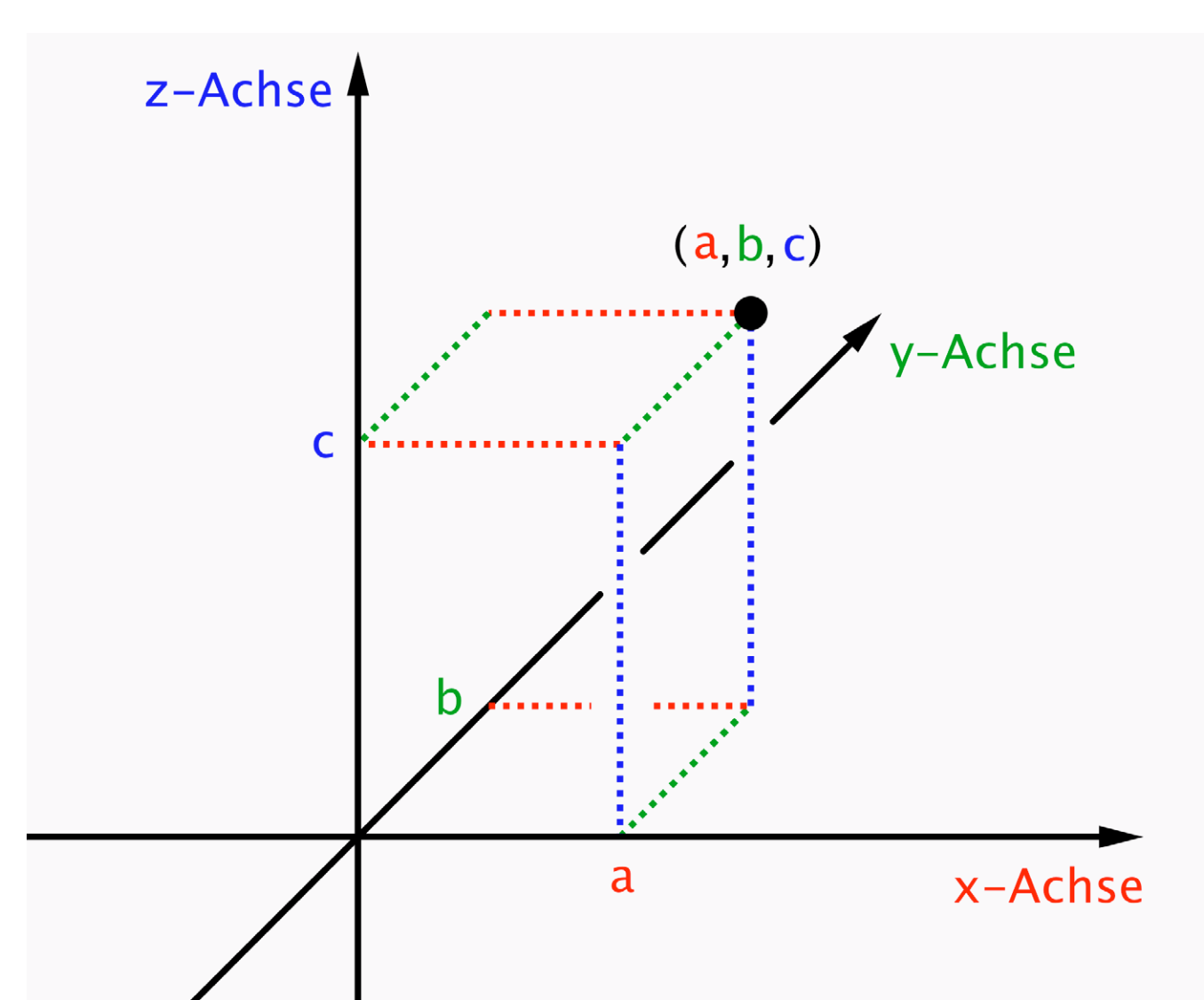
SURFER



SURFER ist ein Programm zur Visualisierung reeller algebraischer Geometrie in Echtzeit. Die dargestellten Flächen sind durch die Nullstellen von Polynomen in drei Variablen gegeben. Das Programm wurde für die Ausstellung »IMAGINARY– mit den Augen der Mathematik« vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach entwickelt.

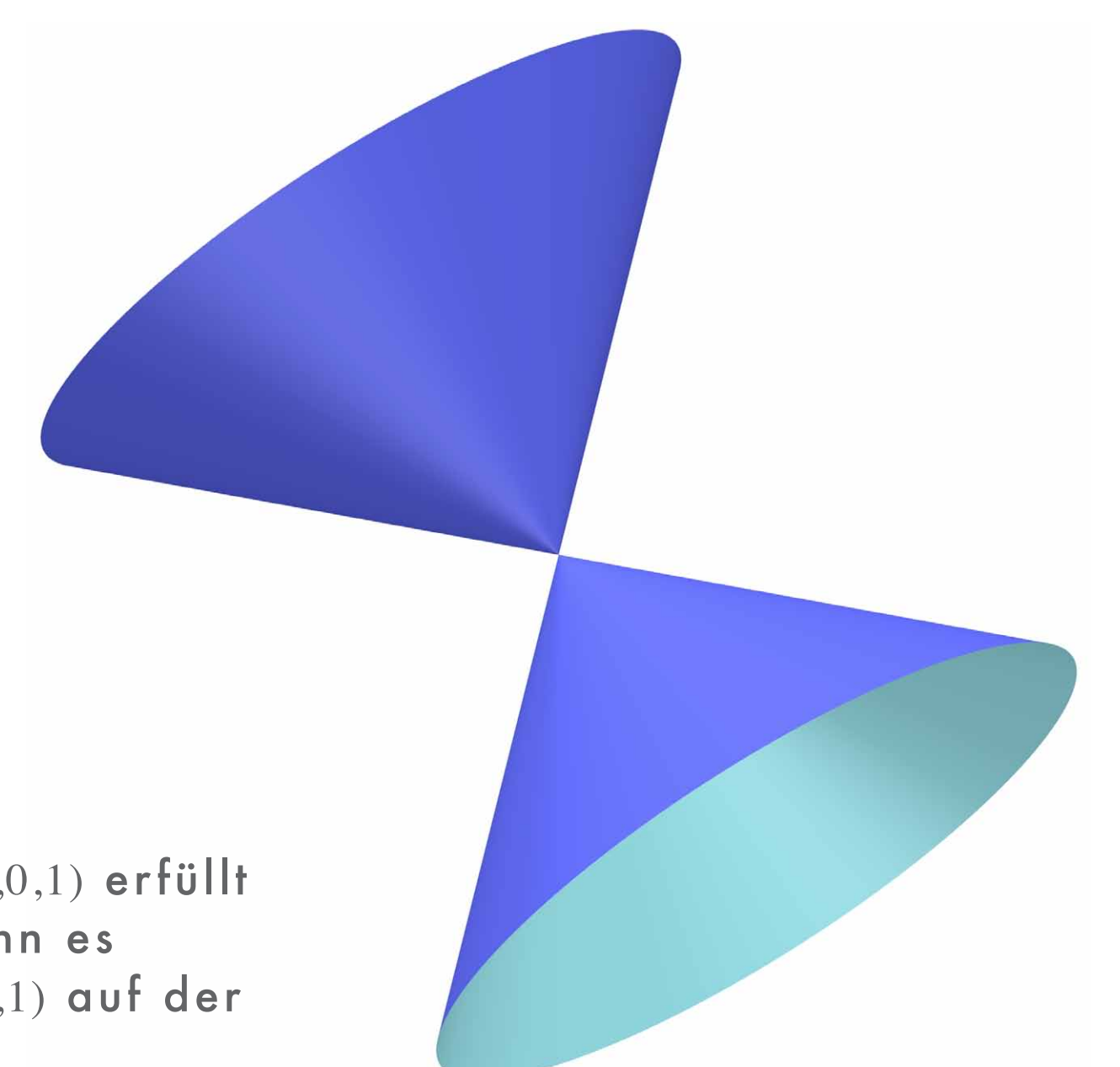
SURFER erlaubt dem Benutzer die Eingabe eines Polynoms und zeigt die dazugehörige Fläche direkt an. Die Benutzung ist extrem einfach und intuitiv. Die Flächen können am Bildschirm gedreht und in der Farbe verändert werden. Außerdem gibt es eine Bildergalerie und Erklärungstexte für interessante Flächen mit besonderen Eigenschaften.

Die algebraische Geometrie befasst sich mit dem Wechselspiel zwischen Algebra, zum Beispiel eine Formel, und Geometrie, das ist die dazugehörige Form. Der dreidimensionale Raum ist der physische Raum, der uns umgibt und in dem wir uns bewegen. Durch die Festlegung von drei aufeinander senkrecht stehenden Koordinatenachsen werden ein Ursprung 0 sowie drei Richtungen x , y und z fixiert. Sie ermöglichen es, uns im Raum zu orientieren, indem wir auf sie Bezug nehmen. Sie definieren die Koordinaten x , y und z eines Punktes P . Das sind also drei Zahlen, die die Lage des Punktes, nach erfolgter Wahl des Koordinatensystems, eindeutig beschreiben und festlegen.

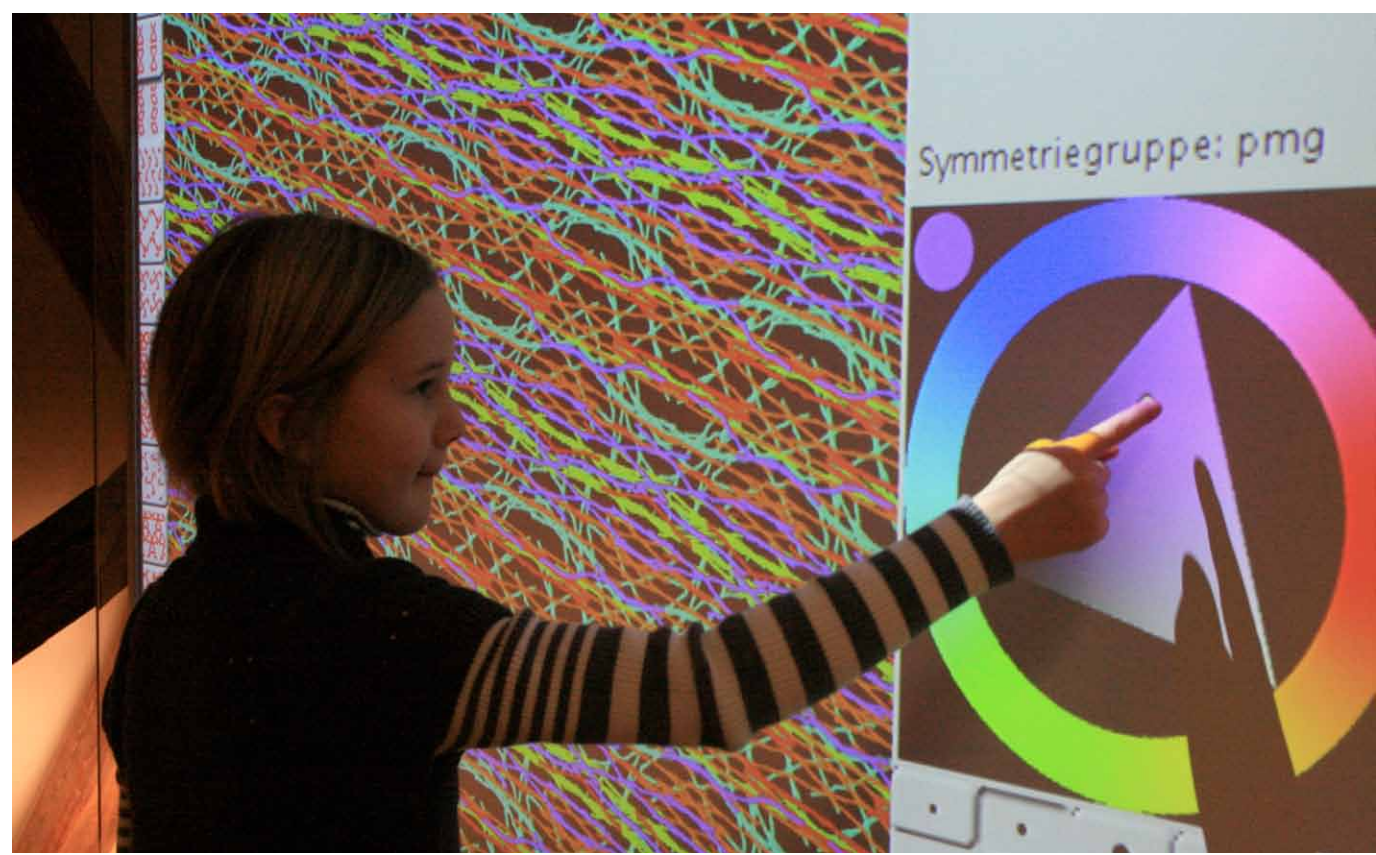


Eine Formel ist hier nichts anderes als eine Gleichung in den drei Variablen x , y und z , etwa $x^2+y^2-z^2=0$. Auf der zugehörigen Figur zu liegen, bedeutet für den Punkt, dass seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Die Lösungen sind also alle Tripel (x,y,z) von Zahlen, für die die linke Seite der Gleichung beim Einsetzen der Zahlen null ergibt (man sagt (x,y,z) ist eine »Nullstelle« der Gleichung). Die dadurch definierten Punkte sind dann genau jene Punkte, die auf der zur Gleichung gehörigen geometrischen Figur liegen.

Beispiel: Der Punkt $(x,y,z) = (1,0,1)$ erfüllt die Gleichung $x^2+y^2-z^2=0$, denn es gilt $1^2+0^2-1^2=0$. Also liegt $(1,0,1)$ auf der zugehörigen Figur.

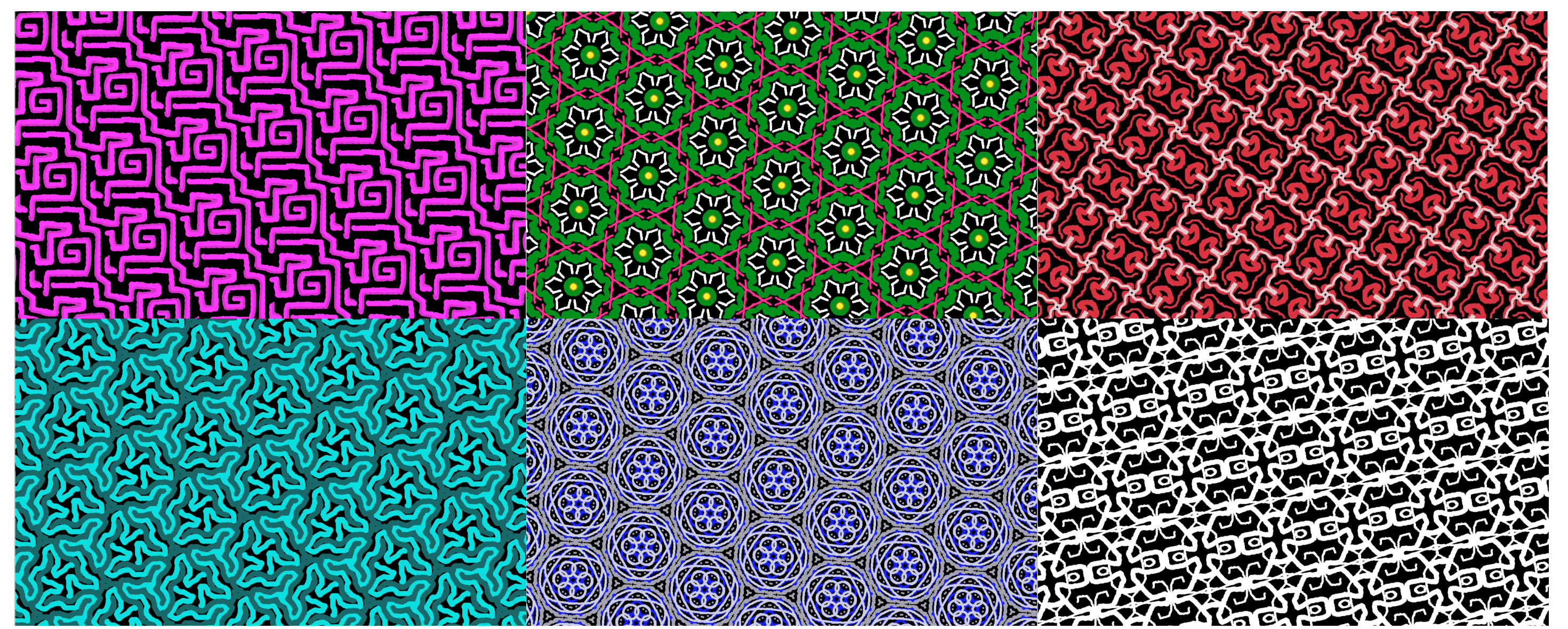


Morenaments



Mit dem Programm Morenaments kann man ausgehend von einem Grundmuster die Ebene parkettieren, d.h. die ganze Ebene mit einem Muster (Ornament) ausfüllen, ohne dass Lücken oder Überlappungen entstehen. Man malt dazu einfach mit der Maus im schwarzen Bereich, wählt rechts eine Farbe und die Stiftstärke aus und kann beobachten,

wie das Grundmuster rechts oben automatisch die Ebene füllt. Interessanterweise lassen sich alle möglichen Muster auf eine von 17 sogenannten Symmetriegruppen zurückführen, die am Bildschirm links eingestellt werden können und in der Mathematik mit Buchstaben abgekürzt werden (p1, p2, pm, pg etc.).



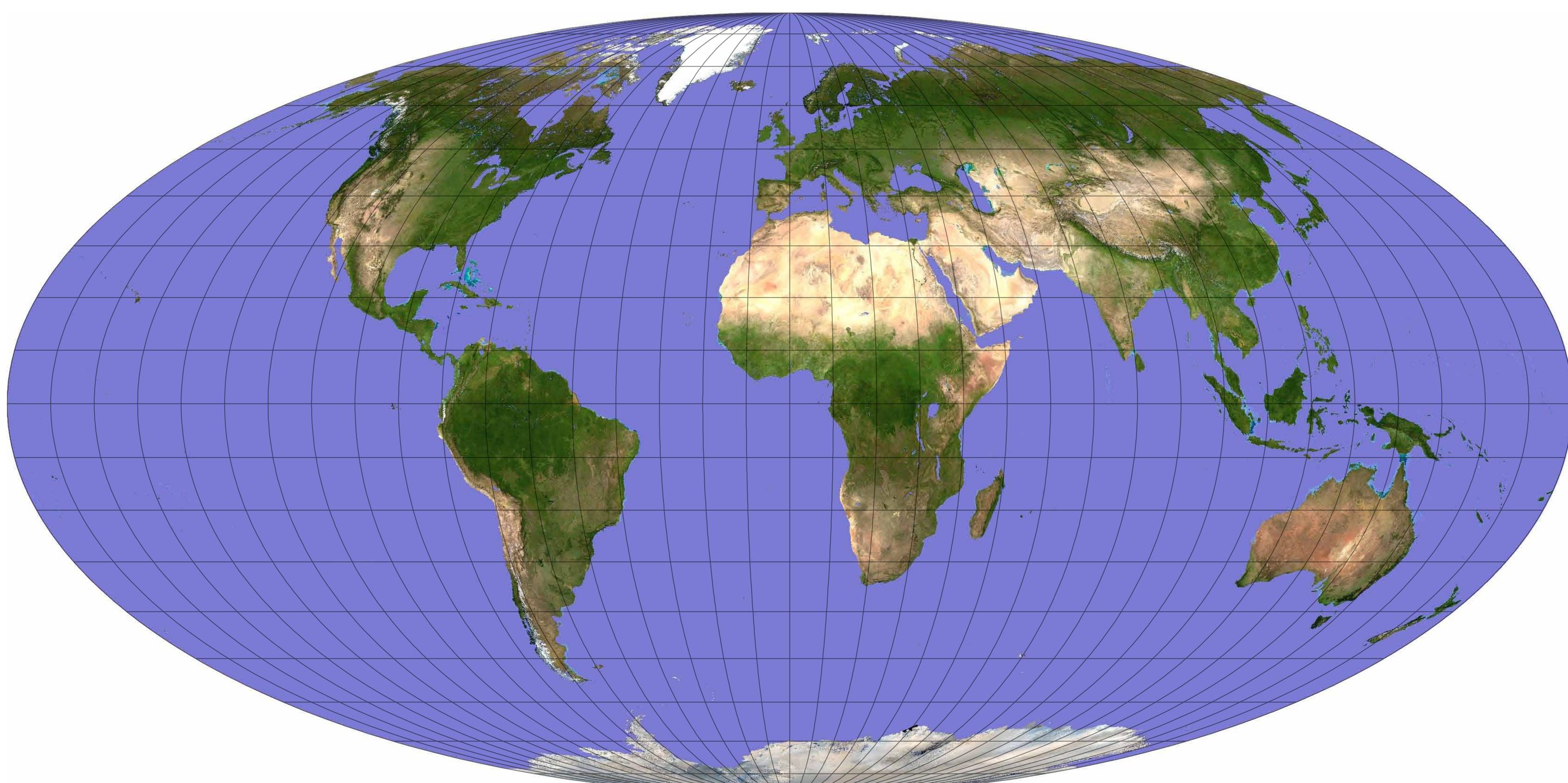
Kristallographische Gruppen Was versteht man unter Symmetrie?

Eine »Kachel« ist ein Bereich der Ebene, der sich aus gespiegelten und gedrehten Versionen des Grundmusters zusammensetzt. Für ein unendlich weit fortgesetztes Ornament, das durch Verschieben und Aneinanderlegen einer einzigen Kachel entstanden ist, gibt es erstaunlicherweise nur endlich viele strukturelle Möglichkeiten. Das bedeutet, es gibt nur endlich viele verschiedene Vorschriften, wie so ein Ornament durch Spiegeln, Drehen und Verschieben eines vorgegebenen Grundmusters entstehen kann. Es sind genau 17 Stück, und man spricht von den 17 kristallographischen Gruppen (oder Symmetriegruppen von Parkettierungen der Ebene).

Der berühmte Mathematiker Hermann Weyl definiert Symmetrie folgendermaßen: »Symmetrisch ist ein Gebilde dann, wenn man es irgendwie verändern kann und im Ergebnis das Gleiche erhält, womit man begonnen hat«. In diesem Sinn sind die gezeichneten Ornamente hochsymmetrische Objekte. Jedes Ornament geht durch bestimmte Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen perfekt in sich selbst über. Die Menge aller der Operationen, die das Ornament in sich selbst überführen, nennt man in der Mathematik eine Symmetriegruppe. Die Araber kannten diese 17 Symmetriegruppen auch schon. In der Alhambra findet man sie alle in den verwendeten arabischen Ornamenten wieder.



Ornament in der Wanddekoration der Alhambra



Können wir die Verzerrung messen?

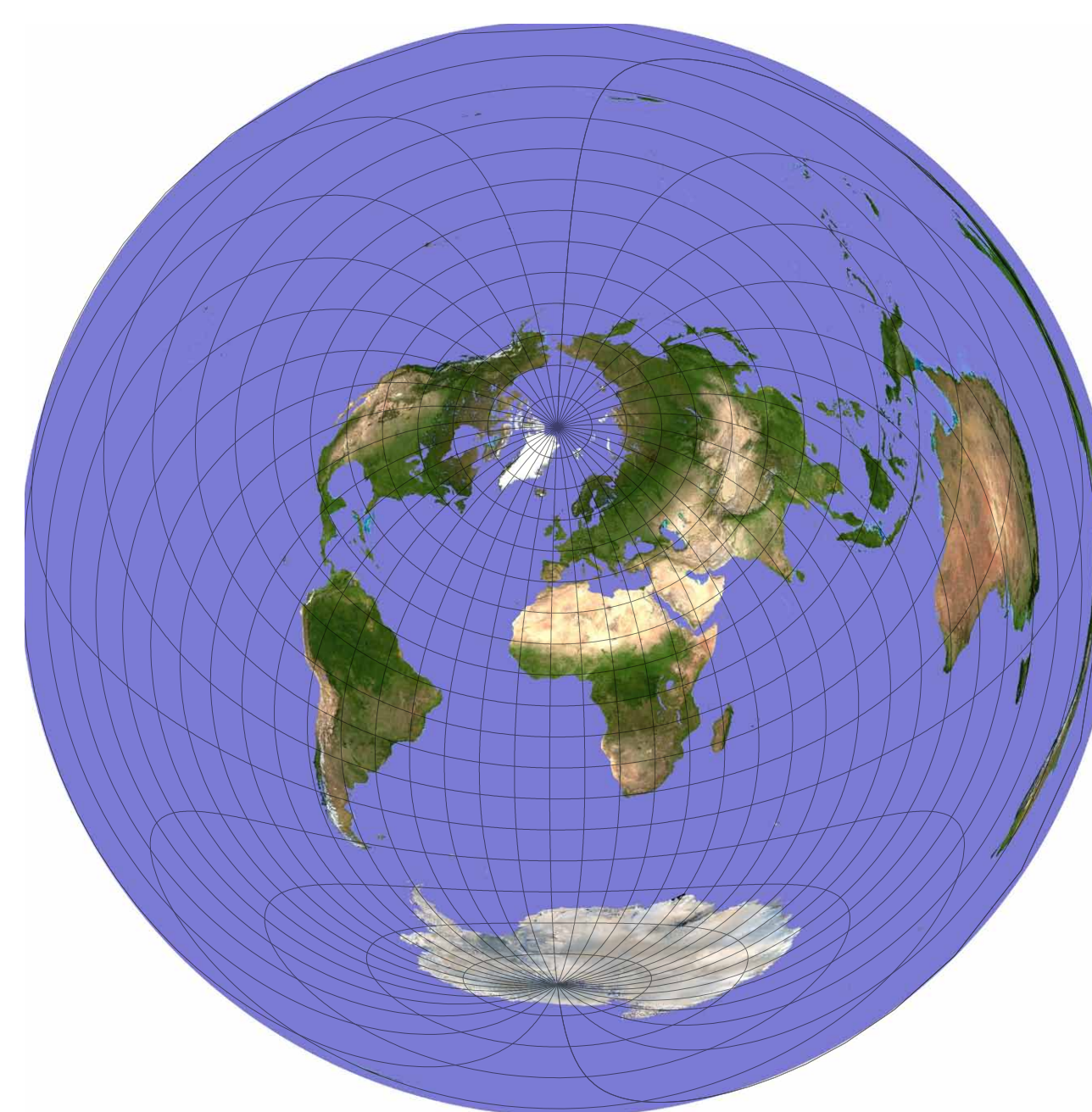
Die Welt sieht auf einer Weltkarte ganz anders aus als auf dem Globus. Manche Kontinente erscheinen kleiner, andere größer, auch ihre genaue Form unterscheidet sich. Die Krümmung des Globus sorgt dafür, dass geometrische Gesetze, die wir aus der ebenen Geometrie kennen, nicht mehr richtig sind! Die Winkelsumme in Dreiecken auf dem Globus ist größer als 180 Grad, der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r ist kleiner als $\pi \cdot r^2$ usw. Es ist daher nicht möglich, ein Dreieck auf dem Globus eins zu eins in der Ebene abzubilden. Wann immer man es versucht, muss man die Abstände der Ecken oder die Winkel im Dreieck verzerren (oder beides). Versucht man, einen Kreis auf dem Globus eins zu eins in der Ebene abzubilden, muss man ebenfalls den Abstand der Kreislinie zum Mittelpunkt verzerren oder den Flächeninhalt verändern (oder beides).

Für die Kartographie bedeutet dies, dass es keine perfekten Karten geben kann: Die Erdoberfläche kann niemals ganz ohne Verzerrung auf einer Karte abgebildet werden. Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Projektionen entwickelt, die Abstände und Winkel auf unterschiedliche Art und Weise verzerren. Um die Verzerrung einer Projektion an einem Punkt auf der Erde zu messen, betrachtet man einen kleinen Kreis mit festem Radius um diesen Punkt und schaut sich das Bild des Kreises auf der mit der Projektion erzeugten Karte an. Dieses Bild nennt man die Verzerrungsellipse oder Tissotsche Indikatrix. Je stärker sich die Verzerrungsellipse vom ursprünglichen Kreis unterscheidet, umso stärker verzerrt die Projektion an diesem Punkt.

Karten der Erde

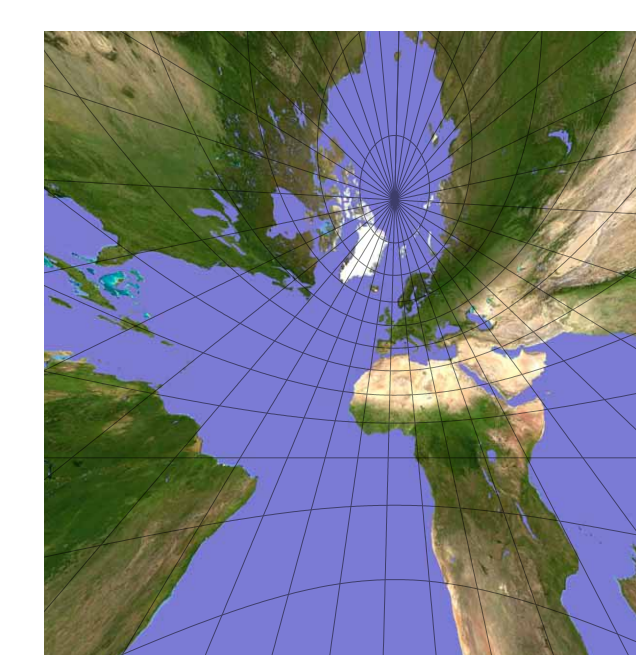
Dieses Programm beschäftigt sich mit der Kartographie und Geometrie der Erdkugel. Wie schon der Mathematiker Carl Friedrich Gauß bewiesen hat, sind die geometrischen Eigenschaften der Kugeloberfläche und der Ebene grundlegend verschieden: Es ist nicht möglich, die Erdoberfläche ohne Verzerrungen auf eine ebene Weltkarte abzubilden (zu projizieren). Das Programm bietet die Möglichkeit, diese Verzerrungen anhand von sechs verschiedenen Projektionen zu untersuchen und zu vergleichen.

Im oberen Bereich kann man zwischen den einzelnen Projektionen umschalten. Bewegt man die Maus über die Karte, wird an jedem Punkt die sogenannte Verzerrungsellipse angezeigt, das Bild eines Kreises mit vorgegebenem Radius unter der jeweiligen Projektion. Eine rote Färbung der Ellipse signalisiert starke Verzerrung, eine grüne Färbung bedeutet, dass es kaum Abweichungen vom ursprünglichen Kreis gibt. Durch Klicken wird die Ellipse fixiert; so kann man verschiedene Karten vergleichen.



An den Verzerrungsellipsen kann man die Eigenschaften einer Projektion ablesen:

- × Ist die Projektion winkeltreu, so sind alle Verzerrungsellipsen Kreise.
- × Ist die Projektion flächentreu, so haben alle Verzerrungsellipsen den gleichen Flächeninhalt.
- × Ist die Projektion längentreu, so haben die Verzerrungsellipsen in Richtung der Längentreue gleich große Halbachsen. Meist sind Projektionen nur entlang der Breitenkreise oder Meridiane längentreu.



Beispiel: Verzerrungsellipsen der winkeltreuen Mercatorprojektion

