IMAGINARY

FORM UND FORMEL MATHEMATISCHER FANTASIE

IMAGINARY – open mathematics ist eine Open-Source-Plattform für interaktive Mathematik. Sie wurde vom mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) entwickelt und wird von der Klaus-Tschira-Stiftung gefördert. Sie basiert auf der Ausstellung **IMAGINARY – mit den Augen der Mathematik**, die im Jahr 2008 erstmals gezeigt wurde. Seitdem war sie in unterschiedlichen Versionen in mehr als 150 Städten zu sehen. Auf der Plattform werden interaktive Programme, Bildgalerien, Filme und Texte unter freien CC-Lizenzen zur Verfügung gestellt. Damit wird für alle, die am Machen von Ausstellungen interessiert sind, die Möglichkeit geschaffen, Ausstellungen selbstbestimmt und unabhängig zu organisieren.

Die Ausstellung **IMAGINARY – Form und Formel mathematischer Fantasie**, die Sie hier sehen, wurde von **Uli Gaenshirt** konzipiert und in Zusammenarbeit mit dem **KOMM-Bildungsbereich** realisiert. Sie verfolgt das Ziel, Mathematik durch großformatige Bilder, Hands-on-Modelle und Software-Visualisierungen erlebbar zu machen. Die Computerprogramme **SURFER** und **Morenaments**, die man auf imaginary.org kostenlos herunterladen kann, ermöglichen es den Besuchern dieser Ausstellung, eigene mathematische Fantasie auf den Bildschirmen zu realisieren.

Die Ausstellung ist in vier Teile gegliedert. Jeder Teil beginnt mit einer allgemeinen Einleitung. Darin werden die Bilder, Objekte und Software Stationen sowie das Thema kurz beschrieben. Die Titel der Ausstellungselemente sind farbig hervorgehoben. Die gerahmten und illustrierten Texttafeln und Pulttexte bieten zusätzliche Informationen. Unter anderem wird dort der Zusammenhang zwischen Form und Formel erklärt.

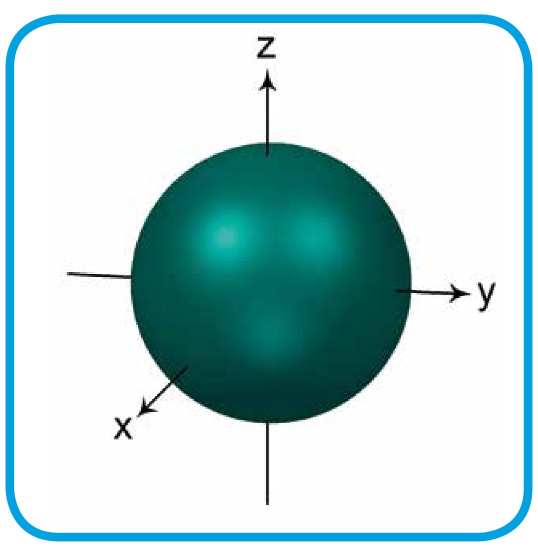
Teil 1: **ALGEBRAISCHE FLÄCHEN**
Der Kernbereich der IMAGINARY-Ausstellungen

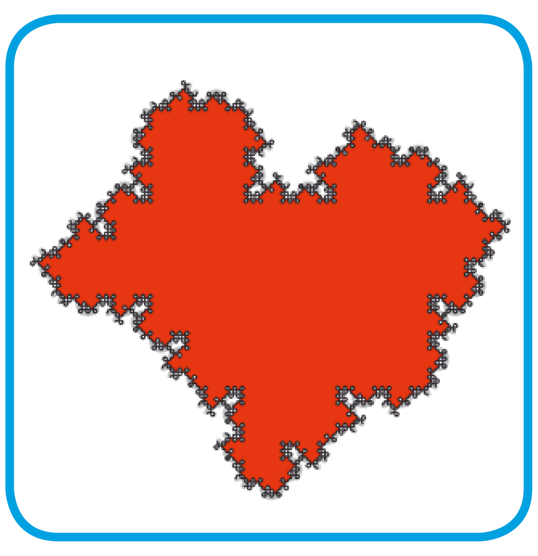
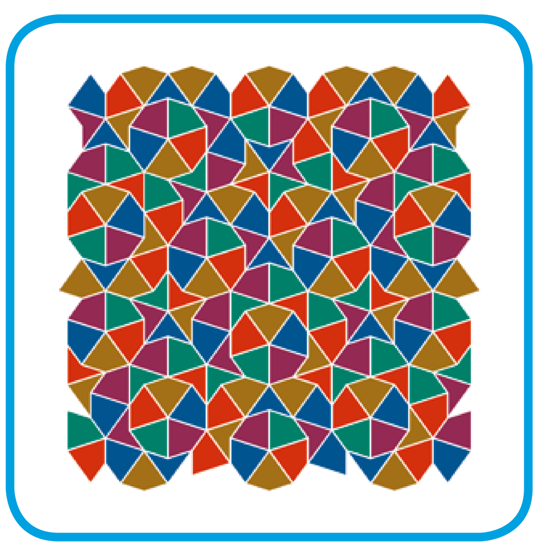
Teil 2: **FRAKTALE**
Die filigranen Erscheinungsformen der Selbstähnlichkeit

Teil 3: **POLYEDER, KRISTALLE UND QUASIKRISTALLE**
Symmetrie und Struktur

Teil 4: **ANGEWANDTE GEOMETRIE**
Antike und moderne Beispiele

www.imaginary.org
www.komm-bildungsbereich.de




ALGEBRAISCHE FLÄCHEN

Algebraische Kurven, wie z. B. Gerade, Kreis, Parabel oder Hyperbel, sind im Allgemeinen aus dem Mathematikunterricht bekannt. Geometrisch dargestellt werden sie in einem **kartesischen Koordinatensystem**, mit einer waagrechten x-Achse und einer rechtwinklig dazu angeordneten y-Achse. Sie sind also eindimensionale Objekte auf einer zweidimensionalen Ebene.

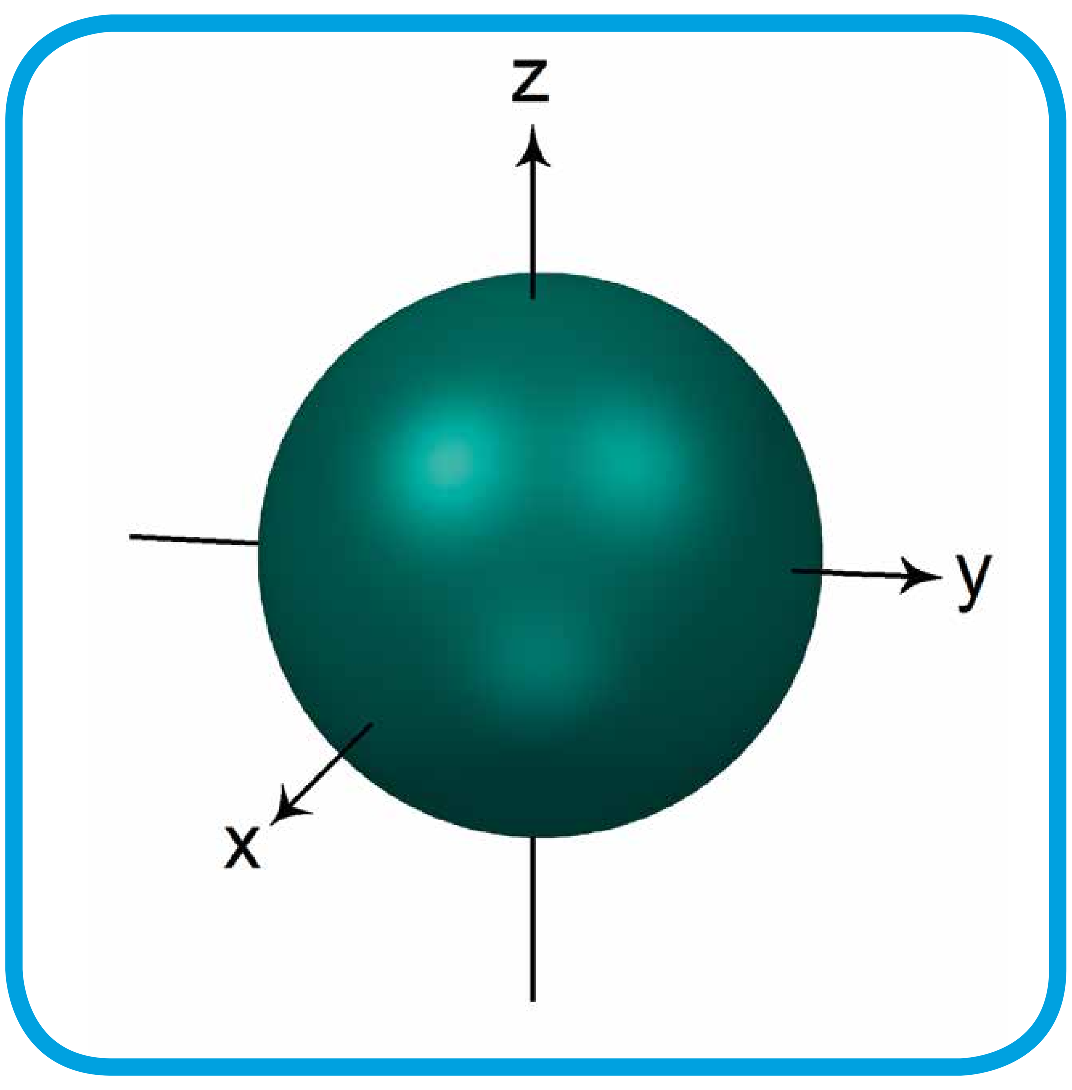
Algebraische Flächen werden in einem räumlichen, dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt, das zusätzlich zur x- und zur y-Achse eine senkrecht auf den beiden anderen stehende z-Achse besitzt.

Eine einfache algebraische Fläche ist die **Kugelfläche**. Ihre Gleichung wird auf einer gesonderten Texttafel hergeleitet. Am **Stabmodell** und am **Pantheon-Kugelobjekt** kann man die Gleichungen anhand von ganzzahligen Lösungen nachprüfen.
Im Gegensatz zum **Kreis**, den man mit einem Zirkel zieht, ist die plastische Darstellung einer **Kugelfläche** schwierig, da ihre Form ohne eine Einzeichnung von Licht und Schatten nicht als räumliches Gebilde wahrgenommen werden kann.

Im Jahr 2008, dem „Jahr der Mathematik“, wurde der Öffentlichkeit das interaktive Computerprogramm **SURFER** übergeben, mit dem algebraische Gleichungen in plastische Darstellungen umgesetzt werden können.
Die Bilder von **Herwig Hauser**, einem der Entwickler des Programms, zeigen, dass bereits einfache Gleichungen über die Kugel hinaus zu sehr ästhetischen Formen führen können.

Eine besondere Eigenart vieler algebraischer Flächen sind singuläre Spitzpunkte. Das grüne **Dingdong** besitzt einen einzigen im Ursprung des Koordinatensystems. Unter dem Bild ist in einem zweidimensionalen Schnitt ein größerer Ausschnitt auf die Wand gezeichnet, auf dem vier ganzzahlige Lösungen markiert sind.

Gibt man in den Computer, auf dem das **SURFER-Programm** installiert ist, eine gültige Gleichung ein, dann wird die dazugehörige algebraische Fläche durch das Programm visualisiert. Anschließend kann das Objekt gedreht sowie der Ausschnitt und die Farbgebung geändert werden.
Auf einem zweiten Monitor werden **algebraische Metamorphosen** von **Bianca Violet** gezeigt. Die Verformungen entstehen durch eine kontinuierliche Veränderung der Gleichungsparameter.



FRAKTALE

Als **Fraktale** bezeichnet man geometrische Gebilde, in denen das Prinzip der **Selbstähnlichkeit** verwirklicht ist. Dieses Prinzip ist in der Natur sehr häufig anzutreffen, zum Beispiel in einem Farnwedel, dessen Fiederblättchen selbst gefiedert sind und daher aussehen wie verkleinerte Kopien des gesamten Wedels, obwohl sie nur ein Teil von ihm sind.

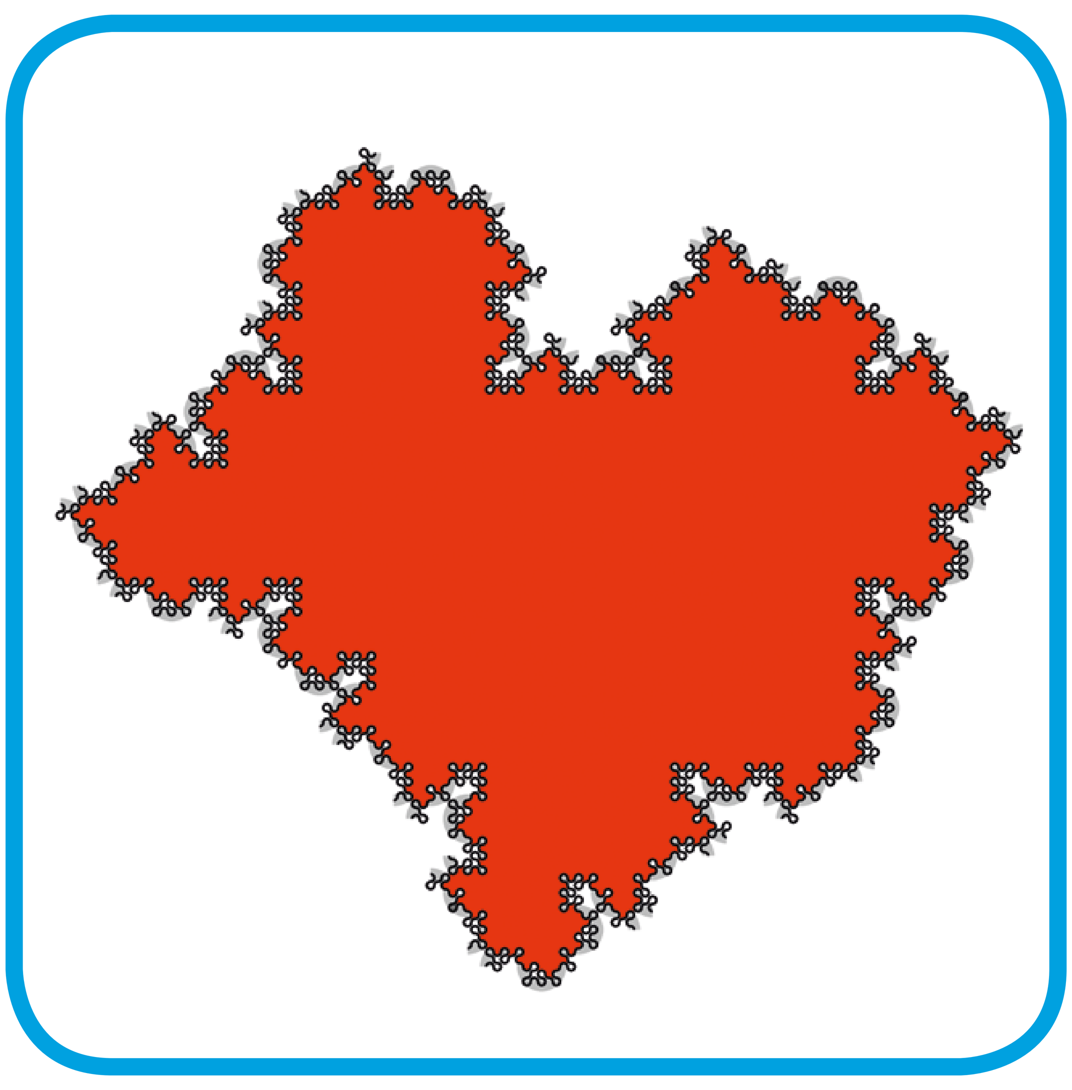
In entsprechender Weise lassen sich fraktale Formen mit dem Computer erzeugen: Man ersetzt eine Form durch mehrere verkleinerte Kopien in einer ganz bestimmten Zusammenstellung. Anschließend wendet man dieselbe Ersetzung auf jede der verkleinerten Kopien an. Eine mehrmalige Wiederholung dieses Prozesses führt zu einer fraktalen Form. Dabei hängt es zumeist nur von der Zusammenstellung der Kopien und nicht von der ursprünglich gewählten Form ab, ob das Ergebnis einem Farnwedel, dem Geäst eines Baumes oder dem filigranen Ornament eines Teppichs ähnelt!

Das Wort **Fraktal** kommt vom lateinischen **fractus** = „gebrochen“. Gemeint ist dabei die gebrochene, nicht ganzzahlige Dimension, die für fraktale Objekte berechenbar ist. Eine normale Linie, z. B. eine Kreislinie, besitzt die Dimension 1.
Die Kurve auf der Plexiglasscheibe des **Flächenfüllkurvenobjekts** überdeckt die Ebene jedoch vollständig, d. h. die Grenzkurve besitzt die Dimension 2.
Die Grenzkurve mit den herzförmigen Inseln, die auf der **Objekttafel** hergeleitet wird, kann durch die logarithmisch berechnete Dimension 1,59... charakterisiert werden.

Eines der erstaunlichsten fraktalen Objekte ist die **Mandelbrotmenge**, auch **Apfelmännchen** genannt, die 1980 von **Benoît Mandelbrot** entdeckt wurde.
Die **drei Bilder** von **Aubin Arroyo** und eine einführende **Texttafel** bieten einen Einblick in die faszinierende Welt dieses grandiosen mathematischen Objekts.

Der Film **Oldschool Connection** von **Torsten Stier** und seine **fraktalen Bilder** basieren zum großen Teil auf dreidimensionalen Mandelbox-Mengen.

Die fraktale Natur der **Nudos Salvajes** (dt. „wilde Knoten“) zeigt sich darin, dass sich die Anordnungen der Kugeln in ihrem Inneren widerspiegeln.
Der gleichnamige **Film** von **Aubin Arroyo** (mit Musik von **Meret Becker**) läuft im Wechsel mit einer von **Vi Hart** (auf amerikanisch) gehaltenen „**Mathematikstunde**“.



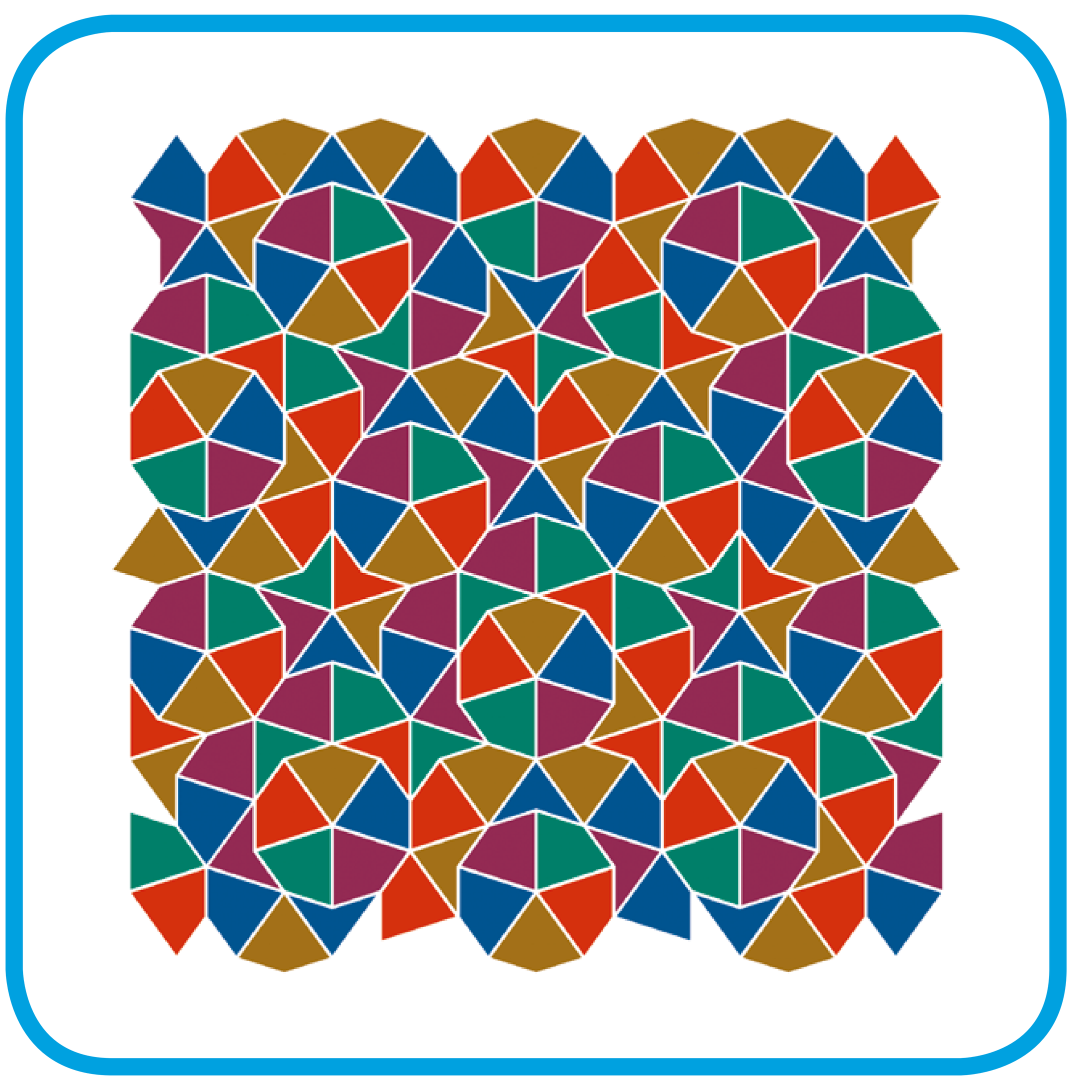
2

POLYEDER, KRISTALLE UND QUASIKRISTALLE

Polyeder sind Körper, die von ebenen Flächen begrenzt werden. Ein Ziegelstein ist ein quaderförmiger Polyeder. Die höchste Symmetrie von allen Polyedern besitzen die fünf **Platonischen Körper**.
Im **Polyederobjekt** sind drei davon, der **Tetraeder**, der **Oktaeder** und der **Ikosaeder**, ineinandergeschachtelt.
Der vierte Platonische Körper ist der **Hexaeder**, auch **Würfel** oder **Kubus** genannt.
Der fünfte ist der **Dodekaeder**, der von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird.
Die **Spiegelobjekte** erzeugen, wenn man eines der Einsatzteile einlegt, die Illusion einer vollständigen kubischen bzw. ikosaedrischen Form.

Kristalle sind periodisch geordnete, atomare Strukturen, die in der Regel eine polyedrische Außenform besitzen. Die Animation **Crystal Flight** zeigt einen Flug durch das Strukturmodell eines **Quarzkristalls**.
Legt man Ziegelsteine mit ihren jeweils gleich großen Seiten aneinander, so bilden ihre Kanten eine räumliche, periodische Gitterstruktur. Die Gitterstruktur erbt von seiner elementaren Baueinheit, dem Ziegelstein, dessen Symmetrieeigenschaften, z. B. sein vollkommen unverändertes Erscheinungsbild nach einer Drehung um 180°.
Es gibt 230 kristalline Raumgruppen und 17 Symmetriegruppen der Ebene.
Auf dem Monitor **Morenaments** wird jede lineare Einzeichnung entsprechend einer zuvor ausgewählten Symmetriegruppe zu einem periodischen, kristallinen Ornament vervielfältigt.

Quasikristalle sind Festkörper, in deren atomarer Struktur eine fünf-, acht-, zehn- oder zwölfzählige Drehsymmetrie nachgewiesen werden kann.
Es kann bewiesen werden, dass eine periodische Reihung ihrer Bauelemente nicht möglich ist, d. h., dass sie **quasiperiodisch** (lat. **quasi** = „fast“) angeordnet sein müssen.
Im **Fibonacci-Wandobjekt** werden zwei geometrische Methoden zur Erzeugung einer eindimensionalen, quasiperiodischen **Fibonacci-Sequenz** gezeigt.
An dem Bild **Kite Fish & Dart Rays** kann die quasiperiodische Ordnung der Fische mit einem drehbaren **Fibonacci-Stab** nachgeprüft werden. Einige mittelalterliche, islamische **Girih**-Schablonen (pers. **Girih** = „Knoten“) können ebenfalls in eine quasiperiodische Ordnung gebracht werden.
Die Anlegeregeln der magnetischen **Girih-Puzzleteile** an der Metallwand erzwingen eine quasiperiodische Struktur mit fünfzähliger Drehsymmetrie.



3

ANGEWANDTE GEOMETRIE

Die **Geometrie** befasst sich mit den Eigenschaften von Gebilden auf der **Ebene** und im **Raum**. Der ursprüngliche, griechische Wortsinn bezieht sich jedoch auf die Vermessung der Erde.

In dem Bild **Stereographische Projektion** wird die **räumliche** Erdkugel auf eine ebene Fläche abgebildet. Dabei wird die Oberfläche der Erde zwangsläufig verzerrt.

Nach den griechischen Gelehrten **Herodot** und **Aristoteles** liegen die Ursprünge der Geometrie in Ägypten. Die Entwicklung dort kann vermutlich auf die Notwendigkeit zurückgeführt werden, dass jedes Jahr nach dem Nilhochwasser die Felder neu eingemessen werden mussten. Die Bauwerke aus der alten ägyptischen Zeit zeugen noch heute von dem hohen geometrischen Wissen ihrer Erbauer.
Am **Modell der Cheopspyramide** kann nachvollzogen werden, dass an diesem Bau vermutlich sehr komplexe geometrische Erkenntnisse realisiert worden sind.
Die geometrische Grundidee des **römischen Pantheons** (vgl. das **Pantheon-Objekt** in Teil 1) zeigt sich in der Einbeschreibbarkeit einer Kugel in seinen Innenraum.

Die Weg-Zeit-Diagramme des **Galileo Galilei** (1564 – 1642) und die Erfindung des Koordinatensystems durch **René Descartes** (1596 – 1650) bildeten die Grundlagen für die Entwicklung der analytischen Geometrie. Damit wurden nicht nur Formen, sondern auch Kräfte und die Zeit rechnerisch erfassbar.
Beispielhaft können am **Modell der Hängebrücke** die unterschiedlichen Formkurven eines belasteten Tragseils und einer unbelasteten Kette verglichen werden.

Die moderne **Chaostheorie** befasst sich mit dem Phänomen, dass sehr kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen oft eine sehr große, unvorhersagbar erscheinende Wirkung auf das Endresultat haben können.
Lyapunov Play zeigt in künstlerischer Darstellung verschiedene Entwicklungen von Tierpopulationen in Abhängigkeit vom **Lyapunov-Exponenten**.
Der **Lorenz-Attraktor** ist ein Modell für die thermische Konvektion der Luft, mit dem das chaotische Verhalten des Wettergeschehens veranschaulicht werden kann.
Der Endpunkt des **chaotischen Magnetpendels** ist bei bestimmten Startpunkten ebenso unvorhersehbar wie die langfristige Entwicklung des Wettergeschehens.
In dem Film **Zukunft der Gletscher** wird gezeigt, wie das Abschmelzen des Aletsch-Gletschers bei einer zukünftigen Klimaerwärmung simuliert werden kann.