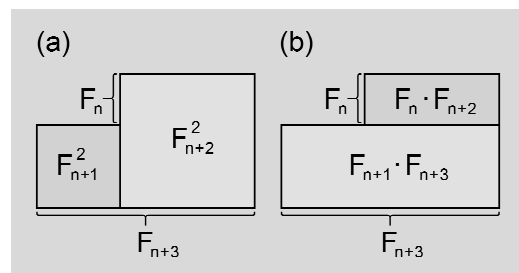


Die von Kepler beschriebene Zahlenreihe, bei der jedes Zahlenglied die Summe der beiden vorhergehenden ist, nennt man heute *Fibonacci-Reihe* (nach dem Mathematiker *Leonardo Fibonacci* aus Pisa, 1170 – ca. 1240).

Mit der Gleichung $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ und mit den Anfangsgliedern $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ können die Glieder dieser Reihe Schritt für Schritt berechnet werden (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...).

Keplers Behauptung, dass sich der konsequente Wechsel der in Figur 2 definierten *Weibchen* und *Männchen* bis ins Unendliche fortsetzt (Figur 2 unten), kann relativ einfach bewiesen werden.

Grundlage dieses Beweises ist die gleiche Größe der gemeinsamen Fläche der beiden Quadrate in Figur 3a und der gemeinsamen Fläche der beiden Rechtecke in Figur 3b.



Figur 3

$$F_{n+1} \cdot F_{n+1} + F_{n+2} \cdot F_{n+2} = F_n \cdot F_{n+2} + F_{n+1} \cdot F_{n+3} \quad (i)$$

$$\rightarrow F_{n+1} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2} = F_{n+1} \cdot F_{n+3} - F_{n+2} \cdot F_{n+2} \quad (ii)$$

$$\rightarrow F_{n+1} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2} = - (F_{n+2} \cdot F_{n+2} - F_{n+1} \cdot F_{n+3})$$

Für $n = 1$ besitzt der Term $F_{n+1} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2}$ wegen $F_2 \cdot F_2 - F_1 \cdot F_3 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2$ den Zahlenwert -1 .

Gleichung (ii) fordert einen stetigen Vorzeichenwechsel des Wertes 1 für wachsendes n . Allgemeingültig ausgedrückt:

$$F_{n+1} \cdot F_{n+1} = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n \quad (iii)$$

Während Gleichung (i) nur den in Figur 3 illustrierten Sachverhalt beschreibt, lässt die umgestellte Gleichung (ii) sowohl den konstanten Betrag der Differenz $F_{n+1} \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n+2}$ erkennen, als auch das beständige Alternieren ihres Vorzeichens. Das Beispiel für $n = 1$ legt den Betrag der Differenz auf 1 fest. Das Alternieren kann somit wie in Gleichung (iii) durch den Term $(-1)^n$ ausgedrückt werden.

Gleichung (iii) lässt auch erkennen, dass für sehr große Fibonacci-Zahlen, d.h. für sehr große Werte für n , der Term $(-1)^n$ immer unbedeutender wird.

Für $\lim n \rightarrow \infty$ kann er vernachlässigt werden, und es gilt:

$$F_{n+1} \cdot F_{n+1} = F_n \cdot F_{n+2} \quad (iv)$$

Nach Ersetzung von F_{n+2} durch $F_n + F_{n+1}$ erhält man:

$$F_{n+1} : F_n = (F_n + F_{n+1}) : F_{n+1} \quad (v)$$

Gleichung (iv) belegt also, dass das Quadrat einer gegen Unendlich gehenden Fibonacci-Zahl dem Produkt aus der vorhergehenden und der nachfolgenden Fibonacci-Zahl gleich ist.

Die umgestellte Gleichung (v) entspricht der Definition des *Goldenen Schnitts*, so wie sie im einleitenden Text zu Figur 1 formuliert worden ist. Dadurch ist die Behauptung Keplers belegt, dass die *Fibonacci-Reihe* dem wahren Wert des *Goldenen Schnitts* immer näher kommt.

Mathematisch ausgedrückt: Mit $\lim n \rightarrow \infty$ gilt: $F_{n+1} : F_n = \tau$ mit $\tau = 0,5 (\sqrt{5} + 1) = 1,618033988...$

Der Wert τ (gr., sprich: Tau) des *Goldenen Schnitts* kann auch auf rein algebraischem Weg hergeleitet werden. Dazu legt man die Länge der zu teilenden Strecke auf 1 fest. Den größeren Teil (lat. Major) bezeichnet man mit s und den kleineren Teil (lat. Minor) mit $1 - s$.

Gemäß der Definition des *Goldene Schnitts* kann also geschrieben werden: $s / (1 - s) = 1 / s$

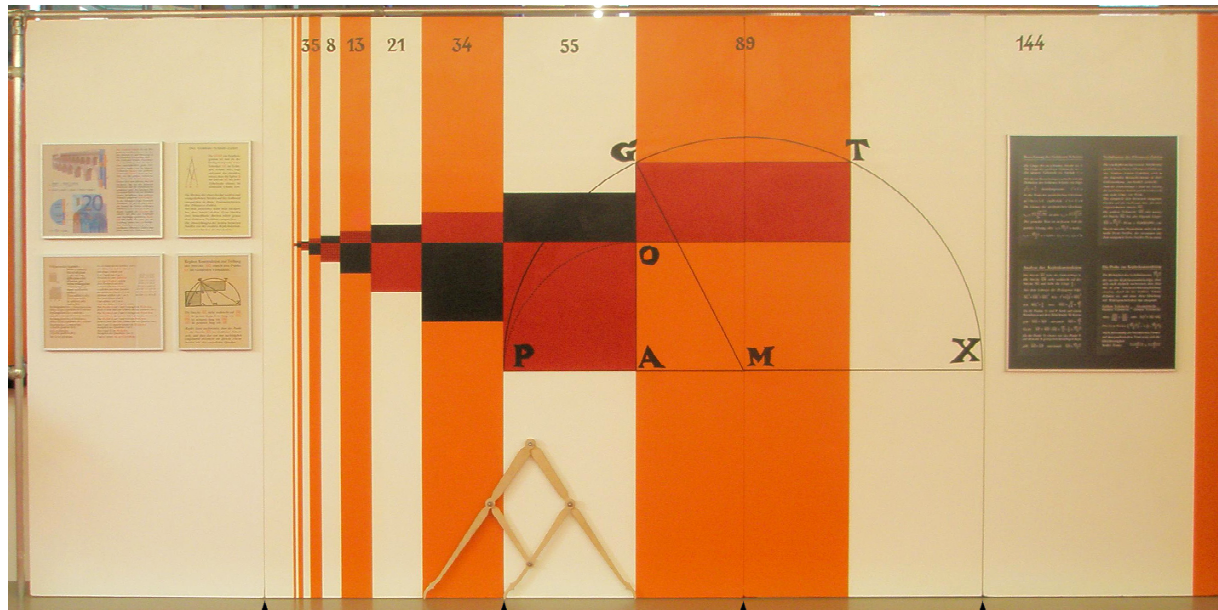
Über $s^2 = 1 - s$ gelangt man zur Standardform der quadratischen Gleichung: $s^2 + s - 1 = 0$

Eine quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$ löst man über: $x_{1|2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$

Für $s^2 + s - 1 = 0$ folgt: $s_{1|2} = (-1 \pm \sqrt{1 + 4}) / 2$. Die positive Lösung ist: $s = 0,5 (\sqrt{5} - 1)$

Da τ das Verhältnis vom Major zum Minor, bzw. vom Ganzen zum Major ist, folgt: $\tau = 1 / s$

Bzw.: $\tau = 1 / s = 1 / 0,5 (\sqrt{5} - 1) = 2 (\sqrt{5} + 1) / (\sqrt{5} - 1) (\sqrt{5} + 1) = 2 (\sqrt{5} + 1) / (5 - 1) = 0,5 (\sqrt{5} + 1)$



Figur 4

Das *Kepler-Wandbild* (Figur 4) vereinigt die beiden im mathematischen Teil beschriebenen Wege zur Konstruktion des *Goldenen Schnitts*. Das Bild ist auf drei Theaterstellwände aufgemalt. An zwei weiteren, unbemalten Stellwänden rechts und links des Bildes sind Texttafeln angebracht. Jede Stellwand ist 250 cm hoch und 100 cm breit. Die Stoßfugen der Stellwände sind in Figur 4 am unteren Bildrand mit kleinen schwarzen Dreiecken kenntlich gemacht.

Das Bild wurde diskret auf einem Zentimeterraster aufgebaut, obwohl die Maßverhältnisse, die aus der zentralen Zirkelkonstruktion resultieren, irrational sind. Jedoch beträgt die Abweichung der ganzzahligen Maße von den irrationalen Maßen weniger als einen zehntel Millimeter, also nur einen Bruchteil der verwendeten Strichstärke. Beim Verhältnis $OA : GO$ sind es 55 cm zu 34 cm statt 55,005...cm zu 33,994...cm und bei der Radiuslinie GM sind es 99,5 cm statt 99,505 cm.

Der Punkt **P** befindet sich genau auf der linken Stoßfuge der mittleren Stellwand in einer Höhe von 98 cm. Der Punkt **A** befindet sich auf gleicher Höhe 55 cm rechts daneben, der Punkt **M** liegt 44,5 cm rechts von **A** auf derselben horizontalen Linie und somit 0,5 cm links von der rechten Stoßfuge der mittleren Stellwand. Wegen $MP = MX = GM = 99,5$ cm befindet sich der Punkt **X** einen Zentimeter links neben der nächsten Stoßfuge, ebenfalls auf einer Höhe von 98 cm.

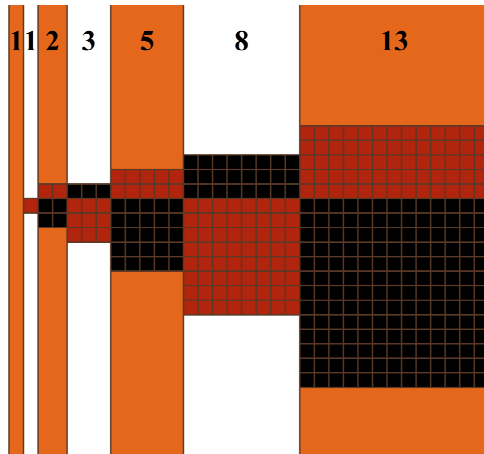
Der vertikale breite orange Streifen zwischen den Punkten **G** und **T** ist am oberen Bildrand von Figur 4 mit der Zahl **89** bezeichnet. Mit diesen Fibonacci-Zahlen am oberen Bildrand werden die Breiten der orangen und weißen Streifen in Zentimetern angegeben. Da der Punkt **M** einen halben Zentimeter links neben der Stoßfuge liegt, teilt die Fuge den **89**-er Streifen nicht genau in der Mitte, sondern im Verhältnis 45 cm zu 44 cm.

Der Punkt **O** liegt 55 cm in vertikaler Richtung über dem Punkt **A** und teilt die Strecke **GA**, die eine Länge von 89 cm besitzt, fast perfekt im Goldenen Schnitt. Der Punkt **O** ist gemeinsamer Eckpunkt des großen roten Rechtecks und des großen roten Quadrats.

- Als Ergebnis von *Keplers Zirkelkonstruktion* wäre das große rote Rechteck und das große rote Quadrat exakt gleich groß.
- Als Ergebnis der *Fibonacci Reihe*, die sich von der linken Bildseite her entwickelt, übersteigt die Fläche des Rechtecks (3026 cm^2) die Fläche des Quadrats (3025 cm^2) um 1 cm^2 . Nach Keplers Definition wäre das große rote Quadrat also ein *Männchen*.

Die Seitenlängen der schwarzen und roten Quadrate, die sich an der linken Seite des großen roten Quadrats anschließen, entsprechen jeweils der Breite des orangen bzw. weißen Streifens, in dem sie sich befinden. Die vertikalen Seiten der darüber eingezeichneten Rechtecke entsprechen der Breite des nächst kleineren gleichfarbigen Streifens.

Damit bilden diejenigen gleichfarbigen Quadrate und Rechtecke, die einen gemeinsamen Punkt in der oberen rechten Ecke des Quadrats besitzen, ein Paar. Bei den roten Paaren besitzt das Rechteck einen Quadratzentimeter mehr als das Quadrat ($\rightarrow$ *Männchen*), bei den schwarzen Paaren besitzt das Rechteck einen Quadratzentimeter weniger als das Quadrat ($\rightarrow$ *Weibchen*).



Figur 5

In Figur 5 sind die ersten sieben Streifen aus Figur 4 vergrößert dargestellt. Die Fibonacci-Zahlen am oberen Rand bezeichnen die Breite der Streifen in Zentimetern.

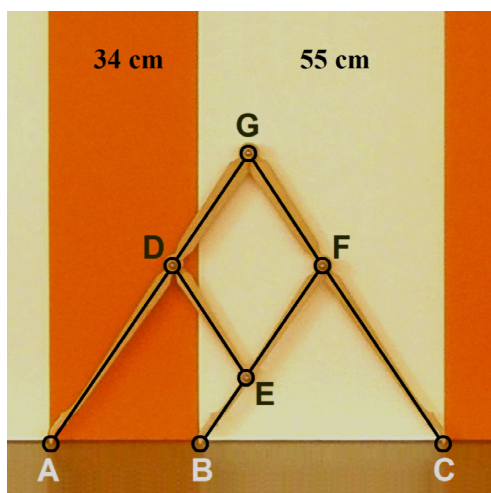
In dieser Größe wird auch das Quadratraster sichtbar, das es ermöglicht, das Alternieren durch Nachzählen zu bestätigen.

Die Annäherung der Quotienten zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen an den Goldenen Schnitt $\tau = 1,61803\dots$ alterniert ebenfalls:

$$\begin{aligned} F_2/F_1 &= 1/1 = 1,000 < \tau \\ F_3/F_2 &= 2/1 = 2,000 > \tau \\ F_4/F_3 &= 3/2 = 1,500 < \tau \\ F_5/F_4 &= 5/3 = 1,666 > \tau \\ F_6/F_5 &= 8/5 = 1,600 < \tau \\ F_7/F_6 &= 13/8 = 1,625 > \tau \end{aligned}$$

Der Gesamtinstallation liegt die didaktische Absicht zugrunde, dem Publikum einen synthetischen Zugang zu ermöglichen, durch Sehen, Lesen, Zählen und Ausprobieren. Eine Texttafel sollte die Interpretation der Originalabbildung und die Übersetzung des lateinischen Originaltextes enthalten, die Beweise zur Approximation des *Goldenen Schnitts* durch die *Fibonacci-Zahlen* oder die algebraische Herleitung des Wertes von τ können auch in reduzierter Form als Fakten dargeboten werden.

Zum Ausprobieren wird ein Proportionszirkel bereitgestellt, dessen drei Spitzen sich in jeder Stellung des Zirkels im *Goldenen Verhältnis* befinden. Damit kann die Annäherung benachbarter Fibonacci-Zahlen an den *Goldenen Schnitt* nachgeprüft werden.



Figur 6

Der Proportionszirkel aus Figur 6 wurde aus 8 mm starken und 4 cm breiten Buchenholzleisten angefertigt.

Wenn für die Abstände zwischen den Drehpunkten D, E, F und G ein jeweiliges Maß von 34 cm gewählt wird, dann müssen die Abstände zu den Zirkelspitzen, DA, FB und FC mit 55 cm bemessen werden, d.h. die beiden Schenkel GA und GC sind 89 cm lang, der Schenkel FB ist 55 cm lang und die Verbindung DE ist 34 cm lang.

Die Form der Spitzen ist so gebogen, dass sie bei dem in Figur 6 gezeigten Öffnungswinkel genau auf den Boden zeigen. Bei der Formgebung der Schenkel ist darauf zu achten, dass sich die Zirkelspitzen genau auf den Verlängerungslinien der Drehpunkte befinden.

Das Prinzip des Proportionszirkels beruht auf der Ähnlichkeit der Dreiecke FBC und GAC. Das Verhältnis AC : BC entspricht immer dem Verhältnis GC : FC.

Um weitere Anwendungen des Proportionszirkels zu ermöglichen, sollte in der Nähe des Wandbilds in ausreichender Größe ein regelmäßiges Fünfeck oder ein Pentagramm aufgezeichnet sein. Auch ein fest montierter Meterstab und ein einfacher, an die Wand geklebter Taschenrechner sind gut geeignet um eigenen Erfahrungen Raum zu geben.