Karten der Erde
Beschreibung und Bedienungsanleitung

Daniel Ramos*
MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya)
übersetzt von Hannes Grimm–Strele†

29. August 2013

Zusammenfassung

In diesem Dokument wird das Exponat „Karten der Erde“ vorgestellt. Wir beschreiben Thema, Bestandteile und Hintergründe des Exponats. Dabei richten wir uns in erster Linie an Organisatorinnen und Organisatoren von Ausstellungen, und nicht an einzelne Museumsbesucherinnen und –besucher. „Karten der Erde“ ist Teil der Ausstellung „Mathematik des Planeten Erde“[1] und hat den ersten Preis des zugehörigen Wettbewerbs gewonnen.

1 Über das Exponat

In diesem Exponat beschäftigen wir uns mit der Darstellung der Erdoberfläche auf flachen Karten. Unser Ansatz unterscheidet sich von dem anderer thematisch ähnlich ausgerichteter Ausstellungsstücke dadurch, dass wir großen Wert auf eine allgemein verständliche und in sich geschlossene Darstellung legen. Außerdem stellen wir die gesamte Software sowie eine Dokumentation als „open source“ zur Verfügung, wodurch es sowohl Museumsbesucherinnen und –besuchern als auch der allgemeinen Öffentlichkeit ermöglicht werden soll, an dem Projekt aktiv teilzunehmen und die eigenen Ideen einzubringen.

Um die Erde auf See– und Landkarten darzustellen, muss ihre kugelförmige Oberfläche auf eine zweidimensionale Karte abgebildet werden. Die Wissenschaft, die sich damit beschäftigt, ist die Kartografie. Im Laufe der Geschichte haben sich viele

*E-mail: daniel.ramos@mmaca.cat
†E-mail: hannes.grimm-strele@gmx.net
[1] http://mpe2013.org/

berühmte Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler mit dem Problem auseinander gesetzt, darunter Johann Carl Friedrich Gauß. Sein „Theorema egregium“ sagt aus, dass es keine „perfekte“ Karte für dieses Problem gibt. Mit anderen Worten, man kann die Erdoberfläche nicht zweidimensional darstellen und dabei alle Längen im gleichen Verhältnis belassen. Die Kartografie entwickelt nun verschiedene Abbildungen, um das Problem, die Erdoberfläche darzustellen, möglichst gut zu lösen.

Wenn wir beispielsweise Strecken auf einem Globus mit ihrer Projektion durch die Mercatorabbildung vergleichen, stellen wir fest, dass Entfernungen nicht erhalten bleiben. In diesem Exponat behandeln wir solche und ähnliche Probleme detailliert und allgemein verständlich. Die einzelnen Teile des Exponats sind:

- Poster von derzeit sechs verschiedenen Kartenabbildungen mit unterschiedlichen Eigenschaften. Alle Poster sind so skaliert, dass sie direkt vergleichbar und die Verzerrungen gut sichtbar sind.

- Die entsprechenden Abbildungen werden mit *Skripten* erzeugt. Jedes Skript umfasst weniger als 50 Codezeilen, so dass jeder in der Lage ist, das Skript zu verändern oder sogar ein eigenes zu schreiben.

- Eine Sammlung von Werkzeugen und Modellen, darunter ein biegbares Lineal, um Entfernungen auf dem Globus zu messen, Winkelmesser für die Ebene und die Kugel und eine Halbkugel, um Längen– und Breitengrade zu veranschaulichen. Diese Werzeuge können für verschiedene Zwecke verwendet werden, wie wir in einer gesonderten Dokumentation beschreiben.

- Ein *Computerprogramm*, das die Tissotsche Indikatrix für alle Kartenabbildungen zeigt. Dadurch kann man auf eine anschauliche und allgemein verständliche Art die Verzerrungen der Erdkugel durch die Kartenabbildungen darstellen.

Das in diesem Dokument vorgestellte Exponat ermöglicht es den Benutzerinnen und Benutzern, interaktiv und spielerisch die Vor– und Nachteile der verschiedenen Abbildungen zu entdecken. Es gibt viele didaktisch sinnvolle Zugänge zu dem Exponat. Thematisch deckt es die Bereiche Geometrie und Trigonometrie der Kugel, Transformationen und Kartografie ab, aber auch Geschichtliches wie Entstehung der Kartenabbildungen, und fortgeschrittene Mathematik wie Differentialgeometrie und nichteuklidische Räume. Nicht zuletzt dient es als Beispiel, wie man wissenschaftliche Inhalte mit Computerprogrammen darstellen und verständlich aufbereiten kann.

Da das zu Grund liegende Problem allgemein verständlich ist, bietet sich die Thematik als Brückenschlag zu komplexen mathematischen Theorien an. Die dahinter stehenden mathematischen Gesetze beeinflussen unsere Welt und unsere Auffassung von ihr auf direkte Art und Weise.

2 Bestandteile des Exponats

Das Exponat beinhaltet die folgenden Teile:

- Einen Globus mit 20 cm Durchmesser, also in einem Größenverhältnis von 1 : 63 710 000 zur Erde (Abbildung 2).
- Poster von sechs verschiedenen Kartenabbildungen, alle in der gleichen Größe wie der Globus.
- Ein biegbares Lineal (Maßband) mit einer Kilometer– und Gradskala für den Globus.
- Eine durchsichtige Halbkugel, um Längen– und Breitengrad zu veranschaulichen (Abbildung 3).
- Einen Winkelmesser für die Ebene und die Kugel.
- Eine Sammlung von flachen Hartschaumstücken in der Form der Kontinente (Abbildung 4).
- Eine Sammlung von gebogenen Hartschaumstücken in der Form der Kontinente (Abbildung 4).
- Ein Computer, auf dem das Programm „Karten der Erde“ läuft.

Nun einige Kommentare zu jedem der Teile.

2.1 Der Globus

Wir verwenden einen Erdglobus mit 20 cm Durchmesser, was einem Maßstab von 1 : 63 710 000 entspricht. Die Größe des Globus ist wichtig, da alle Abbildungen auf diese Größe skaliert werden. Bei der Mercatorabbildung zum Beispiel wird der Äquator in der richtigen Länge angezeigt. Daher wählen wir die Länge des Posters der Mercatorabbildung so, dass sie der Länge des Äquators auf dem Globus entspricht, also $2\pi \cdot 10\,\text{cm} = 62{,}8\,\text{cm}$. Mit einem Globus dieser Größe werden die Poster also klein genug, um sie auf ein Papier der allgemein verbreiteten Größe DIN A0 drucken zu können. Darüber hinaus sind die Poster in dieser Größe einfacher zu transportieren. Größere Plakate wirken in größeren Räumen besser, aber sie sind schwieriger zu transportieren und teurer herzustellen, da ein industrieller Drucker benötigt wird.

Wir entschieden uns für einen Globus von Stellanova, Modell 892094[2], da dieses Modell magnetisch ist und einfach von seinem Fuß abgelöst werden kann. Grundsätzlich wäre es wünschenswert, auf dem Globus und den Karten das gleiche Bild der Erde zu verwenden, aber das wäre zweifellos teurer und komplizierter als einfach einen Globus zu kaufen.

2.2 Die Kartenabbildungen

Eine Kartenabbildung ist eine mathematische Formel, die jeden Punkt auf der Erdkugel, gegeben als Längen– und Breitengrad, auf einen Punkt in der Ebene, gegeben durch x– und y–Koordinaten, abbildet. Indem wir die entsprechenden Formeln in einem kleinen Skript implementieren, können wir jede dieser Kartenabbildungen grafisch darstellen lassen. Die dabei verwendete Bilddatei stammt aus Satellitendaten der NASA[3]. Unter allen frei verfügbaren Bilddateien der Erde besitzt sie eine einzigartig hohe Qualität.

Die Bilder haben die gleiche Skala wie der Globus. Mit anderen Worten, Längen, die sich unter der Kartenabbildung nicht ändern wie z.B. der Äquator unter der Mercatorabbildung, haben in dem projizierten Bild die gleiche Länge wie auf dem Globus. Ebenso ist der Flächeninhalt der Erdoberfläche unter Kartenabbildungen, die den Flächeninhalt erhalten, gleich dem auf dem Globus, und zwar $4\pi \cdot (10\,\mathrm{cm})^2 = 1256{,}6\,\mathrm{cm}^2$. Dadurch kann man einfacher erkennen, welche Teile der Oberfläche verkleinert und welche vergrößert werden.

Zusätzlich zu den Bildern stellen wir den Code zur Verfügung, mit dem die Bilder erzeugt wurden. Auf diese Weise können die Besucherinnen und Besucher die Bilder verändern. Beispielsweise gehen manche Kartenabbildungen von einem Kartenmittelpunkt aus. Dieser Mittelpunkt kann beliebig gewählt werden. Man kann die eigene Heimatstadt als Mittelpunkt wählen, indem man die entsprechenden Parameter des Skripts verändert. Mit kommerzieller Software wäre das selbstverständlich genau so gut möglich, aber da unsere Skripte so kurz und leicht verständlich sind, kann jeder die entsprechenden Änderungen ohne tief gehende Kenntnisse durchführen. Dies emtspricht dem Grundgedanken von „Open Source“: jeder soll in der Lage sein, das Programm zu verstehen und nach den eigenen Wünschen zu verändern. Die dazu benötigten Techniken sind elementar und bieten einen didaktisch sinnvollen Zugang zur Programmierung. Dies ist ein weiterer wichtiger Aspekt dieses Exponats.

[2] http://www.stellanova-europe.com/fileadmin/stv_dateien/datasheets/892094.pdf
[3] http://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=57752

2.3 Werkzeuge

Eine gute Materialsammlung zur Kugelgeometrie ist das „Lénárt Sphere“[4]–Paket, das Kugelschalen mit 20 cm Durchmesser und einen Winkelmesser für die Kugel beinhaltet.

Darüber hinaus konstruieren wir ein biegbares Lineal, indem wir eine entsprechende Schablone (siehe angehängte PDF-Datei) auf einen Streifen Polyester drucken. Auf der Schablone befindet sich sowohl eine Kilometer– als auch eine Gradskala. Auf der Erdkugel entsprechen 40 000 km gerade 360° entlang jedes Großkreises. Die Länge des Maßbandes ist 62,8 cm und entspricht daher genau diesen 40 000 km oder 360° auf dem Globus mit 20 cm Durchmesser.

Wir verwenden ausschließlich SI–Einheiten. Die ursprüngliche Definition von „Meter“ ist tatsächlich genau $\frac{1}{40\,000\,000}$ des Erdumfangs.

2.4 Modelle und Puzzles

Wir verwenden eine durchsichtige Halbkugel, auf der der Meridian und ein Breitengrad sowie entsprechende Markierungen für die Winkel eingezeichnet sind, um Längen– und Breitengrad anschaulich zu definieren.

Aus Hartschaum schneiden wir die Umrisse der Kontinente auf dem Globus und auf zwei Kartenabbildungen, die den Flächeninhalt erhalten, aus. Damit können wir die drei Darstellungen eines Kontinentes mit gleichem Flächeninhalt vergleichen.

3 Die Skripte

Mit den Skripten erzeugen wir die Abbildungen für die Poster. Sie sind in Python geschrieben, weshalb ein Python–Interpreter benötigt wird, um sie auszuführen (siehe Abschnitt 4.2). Diese Skripte sind nicht primär für die breite Öffentlichkeit, sondern eher für die Organisatorinnen und Organisatoren gedacht. Mit ihrer Hilfe kann man beispielsweise die Größenskala anpassen, wenn man einen Globus anderer Größe verwenden will, oder das Zentrum der Kartenabbildung für bestimmte Abbildungen verändern (wir haben Barcelona als das Zentrum gewählt).

Darüber hinaus sollten die Skripte öffentlich im Internet für jeden zugänglich sein. Interessierte Ausstellungsbesucher können die Skripte zu Hause herunterladen und sie ihren Vorstellungen entsprechend anpassen. Dies kann ein sehr lehrreiches Programmierbeispiel sein.

Derzeit sind alle Parameter im Quellcode definiert. Als Ausgangsdaten verwenden wir Satellitenbilder der NASA („blue marble“). Die Auflösung ist hoch genug für die vorgesehene Bildgröße, es sind aber auch höher aufgelöste Bilddateien verfügbar.

[4] www.lenartsphere.com

Das Ergebnis wird im PDF–Format ausgegeben, da darin die Abmessungen der Eingabedaten erhalten bleiben und es einfach zum Drucken verwendet werden kann. Die mathematischen Formeln für die Kartenabbildungen sind nicht von uns implementiert worden, sondern über die Open Source–Bibliothek Proj.4[5] eingebunden.

Auf der ersten Blick scheinen diese Skripte ein sehr technischer Teil des Exponats zu sein, doch wird erst durch ihre Verwendung der eigenständige Umgang mit der Thematik ermöglicht.

4 Das Programm

Das Programm „Karten der Erde. Version 1.0.0“ zeigt über eine grafische Ausgabe mehrere Kartenabbildungen der Erdoberfläche und die entsprechende Tissotsche Indikatrix an. Wie in der „Aktivitäten“–Dokumentation beschrieben, ist die Tissotsche Indikatrix ein Werkzeug, um zu verdeutlichen, wie eine Abbildung die Erdoberfläche verzerrt. Für einen gegebenen Punkt wird eine kleine Umgebung angezeigt. Durch die Verzerrung der Kartenabbildung ist diese Umgebung nicht kreis–, sondern ellipsenförmig. Größe, Orientierung und Abplattung der Ellipse verdeutlichen die Verzerrung durch die Abbildung in diesem Punkt.

Abbildungen mit Tissotellipsen sind auf Büchern, Atlanten und Wikipedia–Seiten über Kartenabbildungen weit verbreitet. Im Gegensatz zu dieser statischen Form der Abbildung zeichnet unser Programm diese Abbildungen interaktiv. Soweit wir wissen, verfügen derzeit nur bestimmte kommerzielle Programme über die Möglichkeit zur Berechnung der Tissotschen Indikatrix. Unser Programm ist das erste im Bereich der Bildungssoftware.

4.1 Features

Im Hauptfenster können mehrere Register ausgewählt werden. Jedes Register enthält eine Kartenabbildung entsprechend der Abbildungen auf den Postern. Wenn man den Mauszeiger über die Karte bewegt, wird eine Tissotellipse angezeigt. Man kann diese Ellipse fixieren, indem man auf die Karte klickt. In der Bildbeschriftung am rechten unteren Rand werden die geografischen Koordinaten des Mittelpunktes angezeigt. Mittels eines Eingabefeldes kann man die Größe der Ellipse skalieren und eine Schaltfläche ermöglicht, alle Ellipsen vom Bild zu entfernen.

Im Allgemeinen werden die Tissotschen Ellipsen rot dargestellt. Wenn die Ellipse die Form eines Kreises annimmt, wird ihr Rand grün, wie auch die Fläche innerhalb der Ellipse grün gefärbt wird, wenn ihr Inhalt demjenigen der entsprechenden Fläche auf dem Globus entspricht. Für Details siehe die „Aktivitäten“–Dokumentation.

[5] http://trac.osgeo.org/proj/

4.2 Technische Anforderungen

Das Programm ist in Python, einer weit verbreiteten Skriptsprache, geschrieben. Das bedeutet, dass der Quellcode nicht kompiliert wird, sondern vom Python *Interpreter* zeilenweise ausgeführt wird. Wir haben uns deshalb für Python entschieden, da die Sprache einfach zu verwenden und im wissenschaftlichen Bereich weit verbreitet ist.

Außerdem ist Python vom Betriebssystem unabhängig, solange es einen funktionierenden Python Interpreter mit den entsprechenden Bibliotheken gibt. Um „Karten der Erde“ zu verwenden, sind folgende Programme notwendig:

- Python Interpreter, v2.7 oder höher.
- numpy. Bibliothek, um numerische Berechnungen mit Python durchzuführen.
- pyproj. Bibliothek, um kartografische Berechnungen mit Python durchzuführen.
- PyQt. Bibliotheken für die grafische Ausgabe mit Python.

Installation in Linux (Ubuntu). Geben Sie auf einer Kommandozeile (terminal) folgende Zeilen ein (Administratorrechte erforderlich):

```
$ sudo apt-get install python python-numpy python-pyproj python-qt4
$ python soe.py
```

Installation in Windows. Laden Sie den Interpreter und die Bibliotheken von folgenden Websiten herunter und installieren Sie sie:

- http://python.org/ftp/python/2.7.3/python-2.7.3.msi
- http://sourceforge.net/projects/numpy/files/NumPy/1.7.0b2/numpy-1.7.0b2-win32-superpack-python2.7.exe/download
- http://pyproj.googlecode.com/files/pyproj-1.9.2.win32-py2.7.exe
- http://sourceforge.net/projects/pyqt/files/PyQt4/PyQt-4.9.5/PyQt-Py2.7-x86-gpl-4.9.5-1.exe
- Klicken Sie doppelt auf die Datei soe.py und wählen Sie das Programm python.exe, das Sie soeben installiert haben, über die Option „Öffnen mit“ aus.

Letztlich wäre eine kompaktere Programmversion in einer einzigen Datei für Windows wünschenswert. Dies ist aber aus technischen Gründen derzeit nicht umsetzbar.

5 Ausblick

Im jetzigen Zustand ist das Exponat voll einsatzfähig, aber es wird höchstwahrscheinlich sowohl in der Software als auch in der Dokumentation Bugs und Tippfehler geben. Auch methodisch gibt es viel Spielraum für Verbesserungen. Einige Features konnten aus Zeitgründen nicht in der aktuellen Version implementiert werden und sind noch in Entwicklung. Andere noch offene Projekte sind:

Bereitstellung in einem „open software"–Archiv. Nachdem das Programm im Wettbewerb vorgestellt wurde, wird es in ein „open software"–Archiv wie z.B. Sourceforge oder Github hochgeladen werden. Damit steht die Software zur gemeinschaftlichen Weiterentwicklung bereit. Das Projekt ist zur Verwendung in Museen und Bildungseinrichtungen vorgesehen. Eine kommerzielle Nutzung ist nicht beabsichtigt. Der Schwerpunkt bei der Weiterentwicklung sollte daher auf didaktischen Aspekten sowie Nutzerfreundlichkeit und Zugänglichkeit liegen.

Berechnung von Kugeldreiecken. Ein schon sehr weit entwickeltes Feature ist die Berechnung von Kugeldreiecken. So nennt man Teile der Kugeloberfläche, die von drei Großkreisen, die sich in drei Punkten schneiden, begrenzt werden. In diesem Feature kann man sich Kugeldreiecke als ein Diagramm anzeigen lassen. Wenn man drei der sechs Parameter des Dreiecks — drei Seiten und drei Winkel — vorgibt, werden die drei fehlenden Parameter durch trigonometrische Formeln auf der Kugel eindeutig bestimmt, ähnlich dem Satz des Pythagoras in der Ebene.

Es besteht ein starker Zusammenhang zwischen sphärischer Trigonometrie und Geodäsie, also der Wissenschaft, die sich mit der Vermessung der Erdoberfläche beschäftigt. Die zu Grunde liegende Fragestellung lautet, wie groß die Distanz zweier beliebiger Punkte auf der Erdoberfläche ist. Um diese Frage zu beantworten, konstruieren wir ein Dreieck mit den zwei Punkten und dem Nordpol als drittem Eckpunkt. Wir kennen zwei Seiten und einen Winkel, da wir die Koordinaten der zwei Punkte gegeben haben. Mit unserem Programm können wir unter Verwendung sphärischer Trigonometrie die gewünschte Distanz berechnen. In Abbildung 7 ist ein Screenshot des Programms zu sehen.

Entwickeln von eigenen Kartenabbildungen. Derzeit sind die Bilder nicht veränderbar und im Bitmap–Format gespeichert. Um die Bilder zu erzeugen, muss man die Skripte ausführen, was einige Minuten dauert, und um sie zu verändern, muss man zuvor die Skripte entsprechend anpassen. Wenn man stattdessen Vektorgrafiken verwendet und nur Umrisse der Kontinente in der Projektion erzeugt, könnte die Benutzerinnen und Benutzer, unter Verwendung einer geeigneten Benutzeroberfläche, „mit den Formeln spielen" und beobachten, was sich am Bild

ändert, wenn man die Projektionsmethode verändert. Damit könnte man beispielsweise die Theorie der konformen Abbildungen von komplexen Variablen veranschaulichen.

Geodäsie. Eine nahe liegende Verbesserung des Programms wäre, für zwei beliebige Punkte die kürzeste Verbindung anzeigen zu lassen. Die Verbindungslinie ist im Allgemeinen keine direkte Linie, sondern ein Kreisbogen, der auf die Karte projiziert wird. Möglicherweise sollte man dafür die Gestaltung des Programms anpassen und z.B. mehrere Kartenabbildungen nebeneinander anzeigen. Dadurch könnte man die Verzerrung sichtbarer machen, wenn man dieselbe Linie auf verschiedenen Karten projiziert sieht.

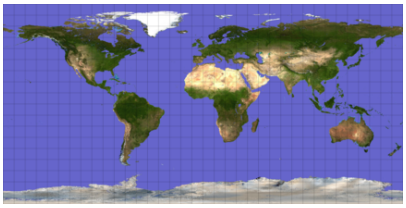
Geogebra. Das Programm *Geogebra* könnte zu einem ähnlichen Zweck wie unser Programm verwendet werden und und viele interessante Möglichkeiten zur Benutzerinteraktion bieten. Geogebra wird in naher Zukunft Python–Skripts unterstützen. Wir werden die entsprechenden Entwicklungen im Auge behalten.

Dokumentation. Wir werden eine Reihe von Aktivitäten mit den vorgestellten Materialien vorschlagen und einige Hintergrundinformationen geben. Darüber hinaus kann und soll diese Dokumentation weiter verbessert und korrigiert werden mit dem Ziel, für mehrere Adressatengruppen die passenden Informationen zu liefern, gleichzeitig jedoch immer verständlich und einfach zugänglich zu bleiben und möglichst frei von Fehlern zu werden. Unsere Absicht ist es, dass die gleichen Materialien sowohl von Schülerinnen und Schülern als auch von Universitätsstudentinnen und –studenten verwendet werden können, indem wir die Aktivitäten und Erklärungen entsprechend anpassen.

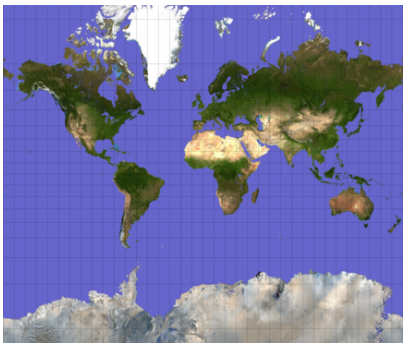
6 Lizenz

Der Autor, Daniel Ramos Guallar, und das Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) stimmen zu, dass das hier vorgestellte Material unter der Creative Commons Lizenz BY-NC-SA veröffentlicht wird und am Wettbewerb „Mathematics of Planet Earth 2013“ teilnimmt. Spätere Versionen des Programms können in öffentlich zugänglichen Software–Archiven unter einer entsprechenden Lizenz veröffentlicht werden. Alle Software, die zur Entwicklung des Programms verwendet wurde, ist „open source“–Software. Die Bilder wurden unter Verwendung von öffentlich zugänglichen Satellitenbildern der NASA erzeugt.

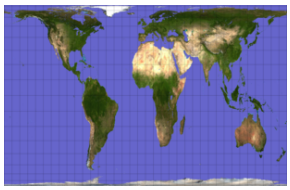
7 Galerie



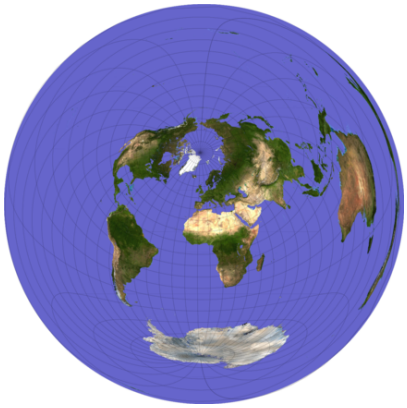
(a) Plate-Carrée



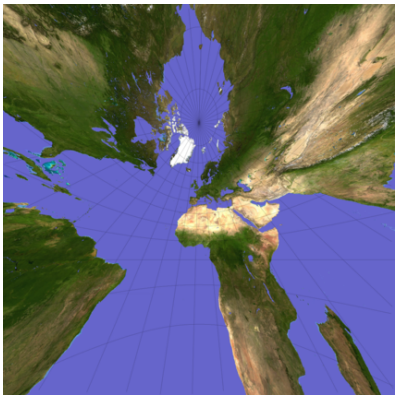
(b) Mercator



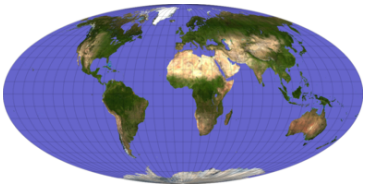
(c) Gall-Peters



(d) Azimuthal Equidistant



(e) Gnomonic



(f) Mollweide

Abbildung 1: Die entsprechend skalierten Poster der Kartenabbildungen.

Abbildung 2: Der Globus.

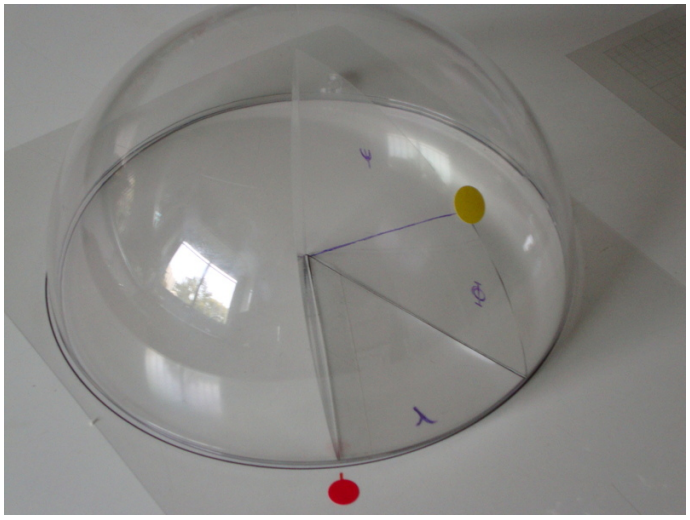


Abbildung 3: Halbkugel zur Veranschaulichung von Längen– und Breitengrad.

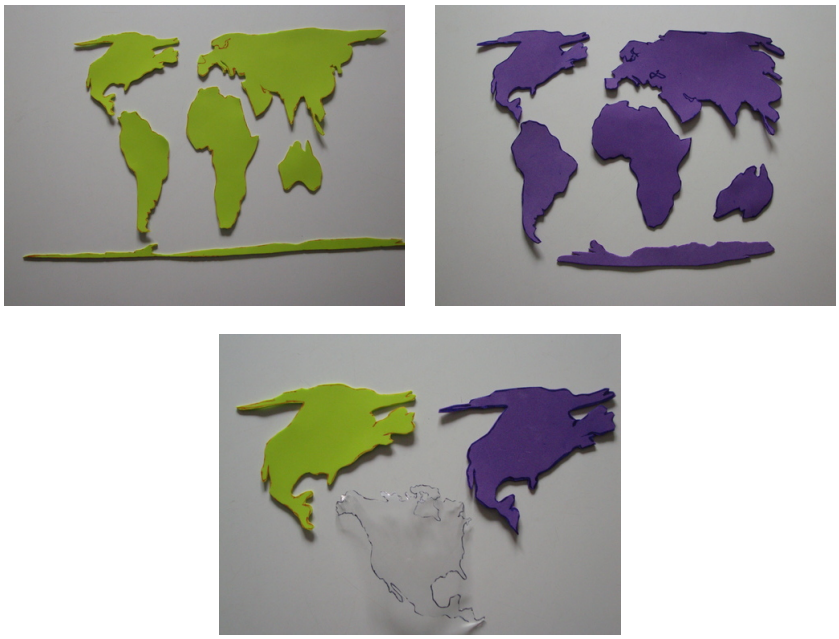


Abbildung 4: Schablonen der Kontinente.

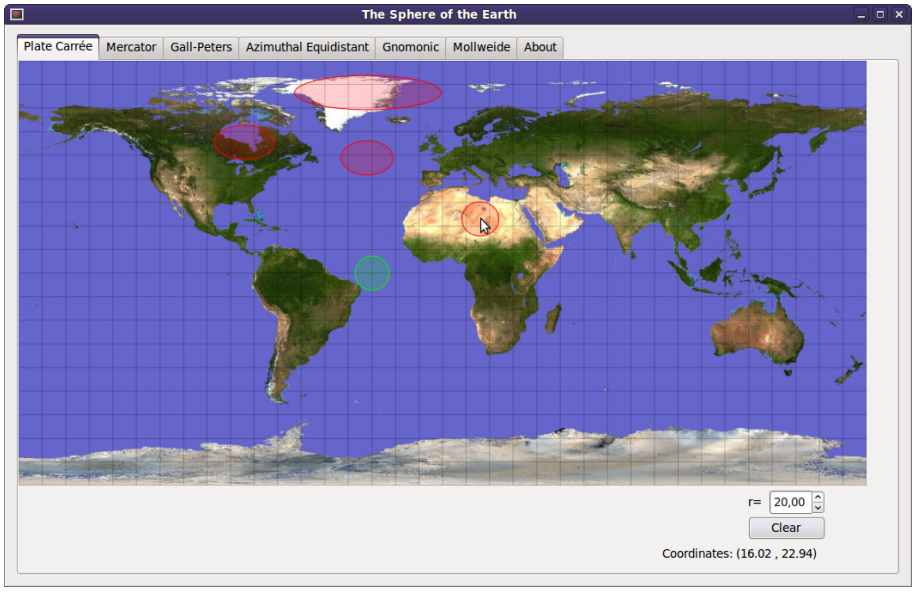


Abbildung 5: Ein Screenshot des Programms.

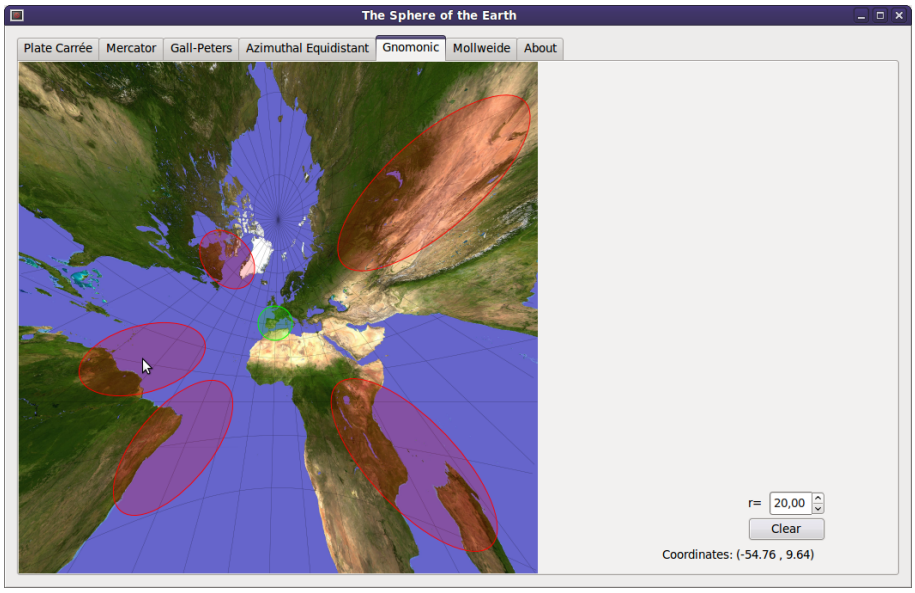


Abbildung 6: Ein Screenshot des Programms.

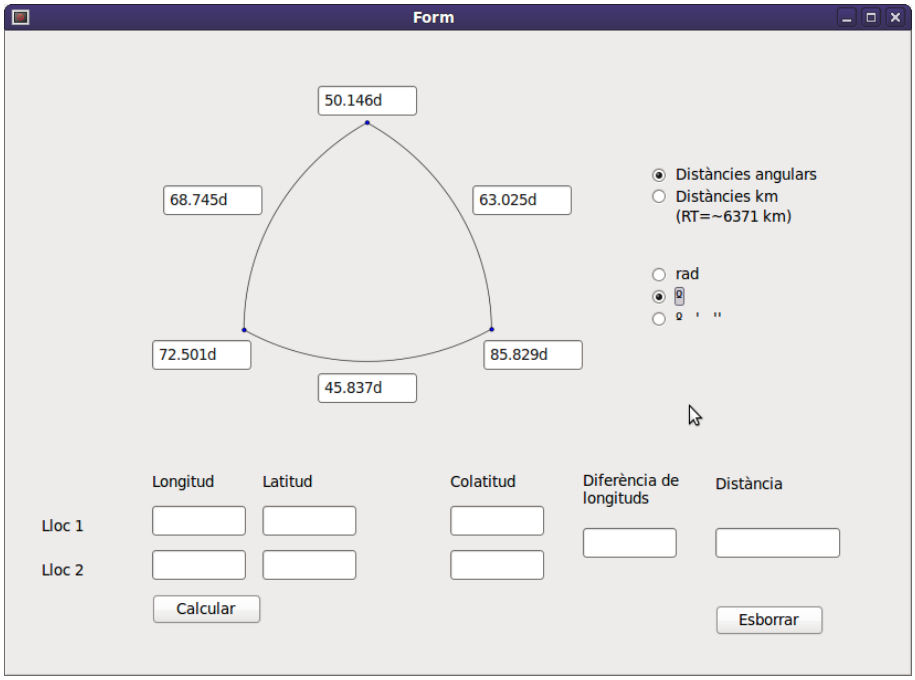


Abbildung 7: Ein Screenshot des Programms zur Berechnung der Kugeldreiecke (in Entwicklung).

Abbildung 8: Daniel Ramos bei der Präsentation des Exponats.

0 km 0º
1000 km 10º
2000 km 20º
3000 km 30º
4000 km 40º
5000 km 50º
6000 km 60º
7000 km 70º
8000 km 80º
9000 km 90º
10000 km 100º
11000 km 110º
12000 km 120º
13000 km 130º
14000 km 140º
15000 km 150º
16000 km 160º
17000 km 170º
18000 km 180º
19000 km 190º
20000 km 200º
21000 km 210º
22000 km 220º
23000 km 230º
24000 km 240º
25000 km 250º
26000 km 260º
27000 km 270º
28000 km 280º
29000 km 290º
30000 km 300º
31000 km 310º
32000 km 320º
33000 km 330º
34000 km 340º
35000 km 350º
36000 km 360º
37000 km
38000 km
39000 km
40000 km