

Imaginary-Galerie ***Hand made Hands-on*** mit deutschen Bildtexten.
Die Abbildungen stammen aus drei unterschiedlichen Ausstellungen.

Ausgewählte Hands-on-Objekte von ***Uli Gaenshirt*** aus der Ausstellung
Form & Formel (2008, Künstlerhaus, Nürnberg)
Diese Ausstellung entstand in ehrenamtlicher Zusammenarbeit mit dem
KOMM-Bildungsbereich (www.komm-bildungsbereich.de)



Räumliches pythagoräisches Stabmodell

Ein Dreieck mit Kantenlängen im Verhältnis 3:4:5 ist rechtwinklig, da $3^2 + 4^2 = 5^2$ die pythagoräische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt.

Das weiße Objekt im Hintergrund ist ein verkleinertes Modell der Königskammer in der Cheops-Pyramide. Die rote, zum 3-4-5-Dreieck aufgespannte Zwölf-Knoten-Schnur kann überraschenderweise exakt in den Innenraum einbeschrieben werden.

Das Objekt im Vordergrund ist ein räumliches pythagoräisches Stabmodell. An einem festen senkrechten Stab sind drei Murmeln eingelassen, in einer Höhe von 7 Einheiten (rot), 8 Einheiten (grün) und 9 Einheiten (blau). In die Fläche sind einige gleichfarbige Gegenstücke eingesenkt worden, unter dem Gesichtspunkt möglicher, ganzzahliger, pythagoräischer Lösungen. Die bereitliegenden Stäbe mit markierten Einheiten haben die Längen von ganzzahligen Diagonalen.

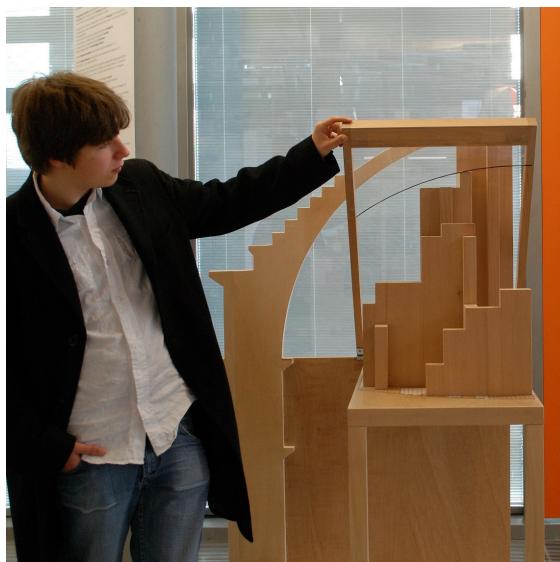
In einem räumlichen cartesischen Koordinatensystem kann der Abstand d zwischen einem Punkt $P_0(0;0;0)$ und einem Punkt $P_1(x;y;z)$ mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$ berechnet werden.

In Übereinstimmung mit der Gleichung $12^2 + 20^2 + 9^2 = 25^2$ hat sich das Mädchen den richtigen Stab ausgesucht, um die beiden blauen Murmeln zu verbinden.

Länge, Breite, Höhe: ca. 110 x 70 x 120 cm

Einheitenmaß: 4 cm

Material: Tripla, Buchenholz, Lindenholz, Tischgestell, Murmeln



Pythagoräisches Kugelmodell

Der junge Mann bewegt den Bügel des pythagoräischen Kugelmodells. Dabei umschreibt die eingesetzte schwarze Kreislinie eine Kugel mit einem Radius von 65 cm.

Die Ecken der hölzernen Quader, die von der schwarzen Kreislinie gestreift werden, entsprechen ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 65^2$. Im Bild wird die Ecke $P(15;36;52)$ berührt.

Auf einer vollständigen Kugel mit Radius 65 existieren 342 Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

Das Modell ist vom Römischen Pantheon inspiriert (ca. 120 n. Chr.), einerseits wegen der exakt in den Innenraum einbeschreibbaren Kugel, und andererseits wegen eines bemerkenswerten Musters auf dem Fußboden, dessen 89 Quadrate so in den Grundrisskreis eingefügt worden sind, dass dieser von 16 Eckpunkten genau berührt wird. Die Gestaltung basiert auf der Überlagerung von zwei Rechtecken mit 11 x 3 Quadraten und zwei Rechtecken mit 7 x 9 Quadraten, die alle, aufgrund der pythagoräischen Gleichung $11^2 + 3^2 = 7^2 + 9^2$, die gleiche Diagonale besitzen.

Länge, Breite, Höhe: ca. 80 x 80 x 150 cm

Einheitenmaß: 1 cm

Material: Buchenholzküchenplatte, Holz, Tischlerplatte, Plexiglas



Geometrie der Cheopsypyramide

Im Modell sind die Kanten der Pyramide mit roten Schnüren aufgespannt. Das schwarze Dreieck zeigt die Steigung der Pyramidenflächen an. Das Verhältnis der horizontalen Dreiecksseite a zur vertikalen Dreiecksseite h ist 11:14. Der Wert für a wird im Allgemeinen mit 115,19 Metern angegeben, was der Länge von 220 ägyptischen Königsellen entspricht. Das Ergebnis für die Höhe h ist somit 146,60 m, bzw. 280 Königsellen.

Das Modell zeigt, wie auf geometrischem Weg die alternativen Höhen h_τ mit dem Goldenen Schnitt τ ($\tau = 1,61803\dots$), und h_π mit der Kreiszahl π ($\pi = 3,14159\dots$) konstruiert werden können.

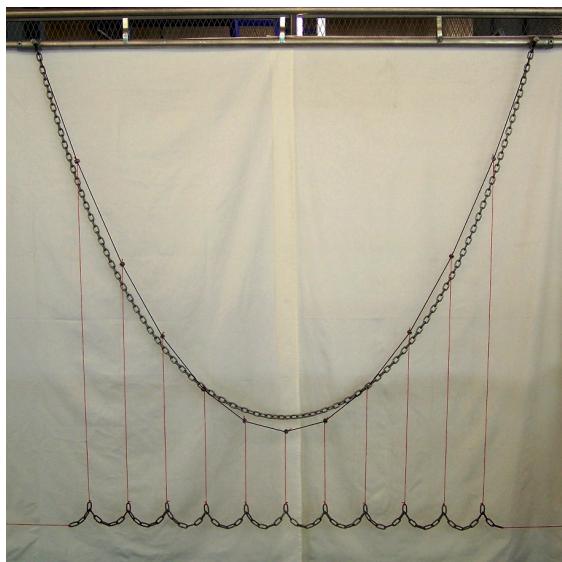
$$h_\tau = \tau^{0.5} a = 146,52 \text{ m} \quad (\text{beachte: } \tau^{0.5} = \sqrt{\tau})$$

$$h_\pi = 4\pi^{-1} a = 146,66 \text{ m} \quad (\text{beachte: } \pi^{-1} = 1/\pi)$$

Mit den antiken Methoden der Messung war es nicht möglich einen Unterschied zwischen h , h_τ und h_π festzustellen. Die Cheopsypyramide wurde möglicherweise als eine geometrische Fundamentalkonstruktion angesehen.

Länge, Breite, Höhe: ca. 50 x 50 x 130 cm

Material: MDF-Platte, Maurerschnur, Holz, Plexiglas



Kettenlinie und Parabel

Die Form einer natürlich durchhängenden Kette wird *Kettenlinie* genannt. Die algebraische Beschreibung dieser Kurve entspricht der Addition zweier Hyperbeln, $y = e^x / 2$ und $y = e^{-x} / 2$, die im Bezug auf die y-Achse spiegelsymmetrisch sind ($e = 2,71828184\dots$).

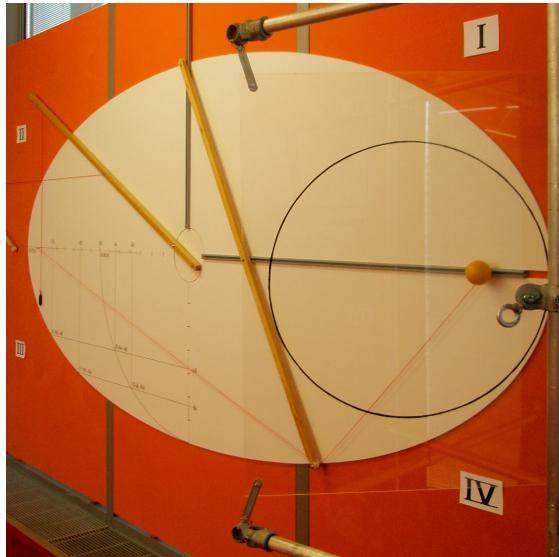
Wenn man, wie bei einer Hängebrücke, an ein durchhängendes Seil vertikale Schnüre mit gleichen horizontalen Abständen befestigt und diese mit jeweils gleichen Gewichten belastet, dann verformt sich die Kettenlinie des Seils zu der etwas spitzen Form der *Parabel*.

Diese Verformung kann leicht nachvollzogen werden, indem man sich die sehr viel dichtere Verteilung der Anhängepunkte entlang des durchhängenden Seils im mittleren Teil vergegenwärtigt, verglichen mit den größeren Abständen in den äußeren Teilen des Seils. Das daraus resultierende hohe Gewicht in der Mitte ist der Grund für die dortige Zuspitzung der Form; das geringere Gewicht in den äußeren Teilen bewirkt, dass das Seil dort etwas weniger durchhängt als die Kette, die ja überall gleich schwer ist.

Höhe: ca. 220 cm

Breite: ca. 220 cm

Material: Kette, Maurerschnur, Galerie-Aufhänger, Tischdecken



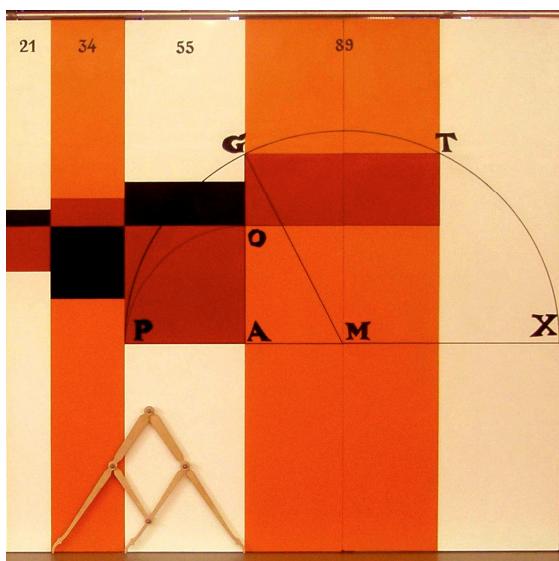
Elliptische Mechaniken

- I. Von einem mit einem Metallring markierten Guckloch aus betrachtet, füllt die weiße Ellipse den schwarzen Kreis auf der Plexiglasscheibe vollständig aus, d. h., dass das Guckloch und der Kreis einen Kegel definieren, dessen Schnittfläche die Ellipse ist.
- II. Johannes Kepler (1571–1630) konstruierte eine Ellipse ausgehend von den Schnittpunkten einer Radiuslinie mit zwei konzentrischen Kreisen. Durch eine horizontale Linie durch den inneren Schnittpunkt und eine vertikale Linie durch den äußeren Schnittpunkt wird jeweils einen Kreuzungspunkt erzeugt. Nahe genug aneinander gereiht ergeben diese Punkte eine Ellipse. Vergleichen Sie bitte die sich kreuzenden Schnüre links im Bild.
- III. Durch die Verwendung Punkten mit ganzzahligen Koordinaten, ist es möglich zu zeigen, dass die Ellipse eine (horizontale) Streckung eines Kreises ist.
- IV. Der Ellipsenzirkel, ein Stab, der auf zwei rechtwinklig zueinander montierten Gleitschienen beweglich ist, erzeugt dieselbe Ellipse wie eine gespannte Schnur, deren Enden in den Brennpunkten der Ellipse befestigt sind.

Höhe der Ellipse: 160 cm

Breite der Ellipse: 340 cm

Material: Harifaserplatte, Holz, Maurerschnur, Vorhangsschienen, Plexiglas, Aluminiumgerüst + Verbinder



Kepler und der Goldene Schnitt

Die schwarzen Zirkelbögen auf einem Holzschnitt von Johannes Kepler zeigen, wie man den *Goldenen Schnitt*, $OA : GO = GA : OA$, auf der Grundlage eines rechtwinkeligen Dreiecks GAM, mit $GA = 2 \cdot AM$, konstruieren kann. Bezogen auf die Zirkelkonstruktion hat das Quadrat AOP genau die gleiche Fläche wie das Rechteck GOT.

Heute wird der *Goldene Schnitt* üblicherweise als $\tau = 0,5(5^{0,5} - 1) = 1,6180339887\dots$ definiert. D. h.: $OA : GO = GA : OA = \tau$.

Die über den Holzschnitt darübergezeichnete Reihenentwicklung von Quadraten und Rechtecken basiert auf den Fibonacci-Zahlen F , mit $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Die Fibonacci-Zahlen lauten also: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,

Kepler beschrieb folgende Gleichung: $F_{n+1} \cdot F_{n+1} = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n$. Mit $\lim n \rightarrow \infty$ folgt daraus der Grenzwert $F_{n+1} : F_n = \tau$.

Für $n = 9$ stimmt das große rote Quadrat ($3025 \text{ cm}^2 = 55 \text{ cm} \cdot 55 \text{ cm}$) und das große rote Rechteck ($3026 \text{ cm}^2 = 34 \text{ cm} \cdot 89 \text{ cm}$) mit der exakten Zirkelkonstruktion auf dem Holzschnitt nahezu perfekt überein.

Mit dem hölzernen Proportionszirkel kann die Annäherung an den *Goldenen Schnitt* überprüft werden.

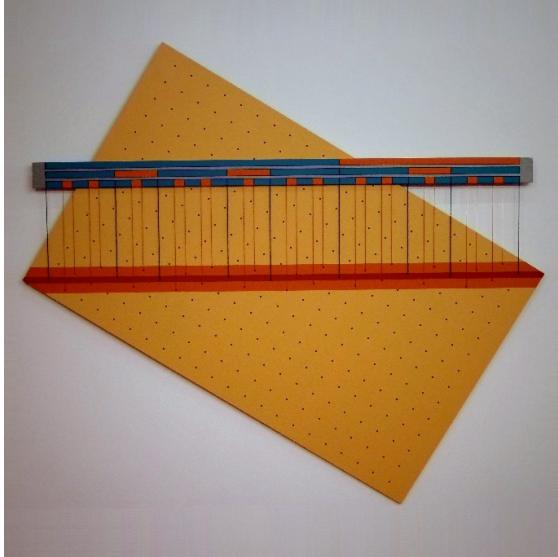
Höhe: 250 cm

Breite: $21 + 34 + 55 + 89 + 56 = 255 \text{ cm}$

Material: Theaterstellwände, Buchenholz

Imaginary-Galerie ***Hand made Hands-on*** mit deutschen Bildtexten.

Ausgewählte Hands-on-Objekte von ***Uli Gaenshirt*** aus der Ausstellung
Die quasiperiodischen Formen (2011, Künstlerhaus, Nürnberg)
 Diese Ausstellung entstand in ehrenamtlicher Zusammenarbeit mit dem
Komm-Bildungsbereich (www.komm-bildungsbereich.de)



Substitution und Projektion

Dieses Objekt zeigt zwei verschiedene Methoden zur Erzeugung einer nichtperiodischen bzw. quasiperiodischen Sequenz auf der Basis des Goldenen Schnitts τ , mit $\tau = 0,5(5^{0,5} + 1) = 1,6180339887\dots$.

Auf dem oberen Balken ist die *Substitutionsmethode* dargestellt. Das lange, blaue Intervall L_q und das orange, kürzere Intervall S_q in der ersten Zeile dieses Balkens stehen in einem Längenverhältnis $\tau : 1$ zueinander. In der zweiten Zeile sind die beiden Intervalle L_q und S_q durch verkleinerte Kopien ersetzt worden: $L_q \rightarrow L + S + L + S + L$ und $S_q \rightarrow L + S + L$, mit $L = L_q \cdot \tau^{-3}$ und $S = S_q \cdot \tau^{-3}$ (bitte beachten Sie: $\tau^{-3} = 1/\tau^3 = 0,236\dots$).

Die Intervalle L' und S' der wiederholten Substitution in der dritten Zeile sind abermals mit dem Faktor τ^{-3} verkleinert worden.

Ein alternativer Weg, eine quasiperiodische Sequenz zu erzeugen ist die sogenannte *Streifenprojektionsmethode*. Der Steigungswinkel φ des quadratischen Punktgitters auf der gelben Platte ist durch $\tan \varphi = \tau$ gegeben. Die vertikale Projektion derjenigen Punkte, die innerhalb des roten bzw. der orangen horizontalen Streifen liegen, stimmt mit den Intervallen, die durch die *Substitutionsmethode* erzeugt worden sind, vollkommen überein.

Abstand zwischen den äußeren vertikalen Fäden: 179,4...cm = $L_q + S_q$
 Material: Siebdruck-Bodenplatte, Strumpfwolle.



Fibonacci Hasen, von Quasizellen gesteuert

Im frühen 13. Jahrhundert beschrieb *Leonardo Fibonacci* eine hypothetische Regel zur Berechnung des monatlichen Wachstums einer Hasenpopulation. Dabei wird eine quasiperiodische Sequenz junger und erwachsener Hasenpaare erzeugt. Wenn man den jungen Paaren die Länge S zuordnet, und den erwachsenen Paaren die Länge L , erhält man eine Sequenz, die mit der durch die *Substitutionsmethode* erzeugten wiederum perfekt übereinstimmt.

Die eindimensionalen (1D) Quasizellen im oberen Teil des Bildes erzeugen diese quasiperiodische Sequenz Schritt für Schritt. Dieses sukzessive Wachstum wird durch bewegliche Lineale (gelb) gesteuert. Die Lineale besitzen eine periodische Durchschnittslänge. Wenn man, wie im Bild gezeigt, ihre Endmarkierungen miteinander verbindet, wird durch die Mechanismen der Quasizellen das sukzessive Wachstum einer perfekten *Fibonacci* Sequenz erzwungen.

Die 1D-Quasizellen sind die Grundlage für die Modellierung eines fehlerfreien dekagonalen quasikristallinen Wachstums. Dieses ist das Thema der drei folgenden Objekte. Ausführliche Beschreibungen dazu finden Sie im *Description Booklet (GERMAN, ENGLISH)* der Galerie *Quasicrystalline Wickerwork* (imaginary.org/node/200).

Länge der blauen Hasenpaare: 26,18...cm = L
 Länge der orangen Hasenpaare: 16,18...cm = S
 Länge der gelben Stäbe: $3L + S$
 Material: Holz, Aluminium, Karton



Cartwheel mit Penrose Rhomben

Das Ammann Gitter, das auf dem blauen Zehneck aufgezeichnet ist, basiert auf einer vertikalen Fibonacci-Sequenz mit horizontal ausgezogenen Grenzlinien. Dieses eindimensionale Gitter wird in assymmetrischer Weise von vier Kopien seiner selbst überlagert, wobei die Kopien um Vielfache des 36°-Winkels gedreht worden sind.

Die dicken weißen und die dünnen gelblichen Penrose-Rhomben wurden mit Magneten im Zentrum des Zehnecks fixiert. Gleiche Rhomben sind mit gleichen Ausschnitten des Ammann-Gitters markiert. Die Anlegeregeln der Penrose-Rhomben erfordern die Fortführung der Gitterlinien von Rhombus zu Rhombus.

Ein Penrose Parkett, bei dem die Markierungen der Rhomben mit dem auf dem Zehneck zu sehenden Ammann Gitter übereinstimmen, wird Cartwheel (dt. Wagenrad) genannt. Obwohl die beiden oberen, schwarz umrandeten Rhomben die Anlegeregeln erfüllen, entsprechen sie dennoch nicht der Cartwheel-Ordnung. Es kann gezeigt werden, dass ein Parkett, das nur durch freies Puzzeln erzeugt wurde, früher oder später zu einer Verletzung der Anlegeregeln führen wird. Zwei nicht erzwungene Verletzungen werden durch die beiden schwarz umrandeten Rhomben im unteren Teil dargestellt.

Höhe des blauen Zehnecks: $179,4\dots\text{cm} = L_q + S_q$

Material: Tischlerplatte, Edelstahlblech, Karton, Magnete



Die Quasizelle Q

Zur Modellierung des Wachstums von Quasikristallen sind weder die Anlegeregeln der Penrose-Rhomben, noch die entsprechenden Überdeckungsregeln von überlappenden Elementarzellen (*Gummelt-Dekagen*) stark genug, um Fehlbelegungen auszuschließen.

Der im Objekt als Mechanismus dargestellte Algorithmus der Quasiperiodischen Sukzession arbeitet zwar ebenfalls schrittweise, generiert aber das Wachstums einer fehlerfreien Cartwheel-Ordnung, indem er jedem dicken Penrose-Rhombus eine steuernde Quasizelle Q zuordnet.

Die Quasizelle Q besitzt fünf verschiebbare Lineale (gelb) mit einer periodischen Durchschnittslänge. Die Lineale der Startzelle Q_0 befinden sich in einer sternförmigen Anordnung. Die große blaue Quasizelle Q ist dem blauen Rhombus in dem Rhomben-Cartwheel links oben im Bild zugeordnet. In der blauen Zelle ist nur eines der gelben Lineale auf der entsprechenden roten Doppelskala verschiebbar montiert. Die Position dieses Lineals hängt von der Verbindung seines linken Endes mit dem parallelen Lineal der Startzelle ab. Seine rechte Endmarkierung übermittelt seine Position an das (nicht gezeigte) Lineal der parallelen kurzen grünen Skala des schwarz umrandeten Plexiglas-Rhombus' rechts oben. Dessen Position entspricht dem dunkelgrünen Rhombus des Rhomben-Cartwheels oben links.

Höhe der blauen zehneckigen Quasizelle: $179,4\dots\text{cm} = L_q + S_q$
 Material: Tischlerplatte, Multiplexplatten, Aluminium, Plexiglas, Eisen.



Detail der Quasizelle Q

In dieser Detailansicht der Zelle Q ist die Position des Plexiglas-Rhombus' unterschiedlich zu denjenigen im Vorgängerbild. Der weiße Pfeil zeigt an, in welcher Richtung der Rhombus um 144° gedreht worden ist. Dennoch entsprechen die Stellungen in beiden Bildern den Anlegeregeln, da eine Fortsetzung der Ammann Linien in jedem Fall gewährleistet ist.

Im Vorgängerbild konnte die rechte Endmarkierung mit dem (nicht gezeigten) Lineal der parallelen grünen Skala verbunden werden, da beide Endmarkierungen sich innerhalb des, durch die gelbe Klammer markierten, gemeinsamen Intervalls der parallelen Skalen befand.

In der alternativen Rhombusstellung, die in dem nebenstehenden Bild gezeigt wird, steht die Endmarkierung außerhalb des, durch die (kürzere) gelbe Klammer markierten, gemeinsamen Intervalls. Deshalb ist diese Rhombusstellung an diesem Platz im Bezug zur Startzelle nicht erlaubt. Der Quasizellen-Mechanismus bzw. der Algorithmus der *Quasiperiodischen Sukzession* erlauben ausschließlich Anlegungen, die mit der *Cartwheel-Ordnung* übereinstimmen. Diese Ordnung ist sowohl eindeutig als auch unbegrenzt definiert.

$a_{0..i\bar{1}} = 1 - d_{0..i} \in$	$t(Q_{0..i}) = T$	$a_{0..i1} = 1 - c_{0..i} \in$
$b_{0..i\bar{1}} = e_{0..i} \in$		$b_{0..i1} = \tau^{-1} - d_{0..i} \in$
$c_{0..i\bar{1}} = 1 - a_{0..i} \in$		$c_{0..i1} = \tau^{-1} - e_{0..i} \in$
$d_{0..i\bar{1}} = \tau^{-1} - b_{0..i} \in$		$d_{0..i1} = 1 - a_{0..i} \in$
$e_{0..i\bar{1}} = \tau^{-1} - c_{0..i} \in$		$e_{0..i1} = b_{0..i} \in$
$a_{0..i\bar{4}} = \tau^{-1} - b_{0..i} \in$		$a_{0..i2} = \tau^{-1} - e_{0..i} \in$
$b_{0..i\bar{4}} = -\tau^{-1} + c_{0..i} \in$		$b_{0..i2} = 1 - a_{0..i} \in$
$c_{0..i\bar{4}} = 1 - d_{0..i} \in$		$c_{0..i2} = b_{0..i} \in$
$d_{0..i\bar{4}} = e_{0..i} \in$		$d_{0..i2} = 1 - c_{0..i} \in$
$e_{0..i\bar{4}} = 1 - a_{0..i} \in$		$e_{0..i2} = -\tau^{-1} + d_{0..i} \in$
$0 < a^{\text{def}}(c^{\text{def}}, d^{\text{def}}) < 1$		$0 < b^{\text{def}}(e^{\text{def}}) < \tau^{-1}$
$a_{0..i\bar{3}} = \tau - c_{0..i} \in$		$a_{0..i3} = \tau - d_{0..i} \in$
$b_{0..i\bar{3}} = 1 - d_{0..i} \in$		$b_{0..i3} = e_{0..i} \in$
$c_{0..i\bar{3}} = 1 - e_{0..i} \in$		$c_{0..i3} = \tau - a_{0..i} \in$
$d_{0..i\bar{3}} = \tau - a_{0..i} \in$		$d_{0..i3} = 1 - b_{0..i} \in$
$e_{0..i\bar{3}} = b_{0..i} \in$		$e_{0..i3} = 1 - c_{0..i} \in$
$a_{0..i\bar{2}} = 1 - b_{0..i} \in$		$a_{0..i4} = 1 - e_{0..i} \in$
$b_{0..i\bar{2}} = c_{0..i} \in$		$b_{0..i4} = \tau^{-1} - a_{0..i} \in$
$c_{0..i\bar{2}} = 1 - d_{0..i} \in$		$c_{0..i4} = \tau^{-1} + b_{0..i} \in$
$d_{0..i\bar{2}} = \tau^{-1} - e_{0..i} \in$		$d_{0..i4} = 1 - e_{0..i} \in$
$e_{0..i\bar{2}} = \tau^{-1} - a_{0..i} \in$		$e_{0..i4} = d_{0..i} \in$
$a_{0..i\bar{5}} = \tau^{-1} + e_{0..i} \in$		$a_{0..i5} = \tau^{-1} + b_{0..i} \in$
$b_{0..i\bar{5}} = -\tau^{-1} + a_{0..i} \in$		$b_{0..i5} = 1 - c_{0..i} \in$
$c_{0..i\bar{5}} = 1 - b_{0..i} \in$		$c_{0..i5} = d_{0..i} \in$
$d_{0..i\bar{5}} = c_{0..i} \in$		$d_{0..i5} = 1 - e_{0..i} \in$
$e_{0..i\bar{5}} = 1 - d_{0..i} \in$		$e_{0..i5} = -\tau^{-1} + a_{0..i} \in$
	$i, j \in \{1, 4, 3, \bar{2}, \bar{5}, 5, 4, 3, 2, 1\}$	
	$j \bar{1} \bar{4} \bar{3} \bar{2} \bar{5} 5 4 3 2 1$	
	t_j	

Die rekursive Formel der Quasiperiodischen Sukzession

Diese rekursive Formel besteht aus 50 Skalenwertumrechnungen. Dabei entsprechen die zehn Blöcke in den äußeren Spalten den zehn möglichen Rhomben-Nachbarschaften h_j , die in der mittleren Spalte bildlich dargestellt sind. Mit a, b, c, d und e werden die fünf Werte der jeweils um 36° zueinander gedrehten Doppelkästen der Quasizelle Q bezeichnet. Jedem dicken Penrose-Rhombus kann eindeutig genau eine Quasizelle Q zugeordnet werden.

Mit fünf infinitesimal kleinen Startwerten $\mu_0 = 10^{-n}$, mit $\lim n \rightarrow \infty$, die in dem zentralen Block eingetragen werden, führt die Formel zu vier (h_1, h_2, h_4, h_1) richtigen Resultaten (fünfmal $\in \rightarrow$ Wahrheitswert $t_j = T$) und zu sechs falschen Resultaten (einmal $\notin \rightarrow t_j = F$).

Die fünf Werte einer Zelle Q_{0j} mit Wahrheitswert T werden als Werte von Q_{0i} ($j \rightarrow i$) in den zentralen Block eines neuen Formelblatts eingetragen. Dort werden wiederum vier, fünf oder sechs Nachbarzellen Q_{0ij} jeweils fünf korrekte Werte besitzen. Für diese Zellen werden, nach Umbezeichnung von i zu $...$ und j zu i , in eigenen Formelblättern wieder vier bis sechs zulässige Nachbarzellen $Q_{0..ij}$ ermittelt.

Dieses rekursive Formelsystem erzeugt Schritt für Schritt, den Erfordernissen eines quasikristallinen Wachstummodells entsprechend, eine fehlerfreie quasiperiodische Cartwheel-Ordnung.

Autor: ***Uli Gaenshirt, Nürnberg, Germany***
Lizenz: CC BY-NC-SA

Kontakt: uli.gaenshirt@yahoo.de