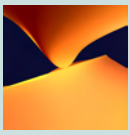
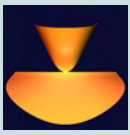
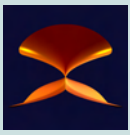
1 Calypso

Die Fläche *Calypso* mit Gleichung $x^2 + y^2 z = z^2$ enthält drei Geraden. Die horizontale Gerade ist klar ersichtlich, sie geht durch den Ursprung 0, in dem sich der obere und der untere Teil berühren. Die zwei anderen Geraden liegen in einer vertikalen Ebene, sie gehen ebenfalls durch 0 und schneiden sich dort. Der Schnitt der Fläche mit dieser Ebene zeigt die beiden Geraden (mittlere und rechte Abbildung).

Verschiebt man diese Ebene etwas nach vorne, so wird die Schnittkurve zu einer Hyperbel (linke Abbildung). Dies lässt sich leicht durch Rechnung nachprüfen, indem man in der Gleichung entweder $y = 0$ oder $y = 1$ setzt. Im ersten Fall ergibt sich $x^2 = z^2$ oder $(x - z)(x + z) = 0$, die Gleichung von zwei Geraden in der Ebene. Im zweiten Fall erhält man $x^2 + z = z^2$. Dies lässt sich in $-x^2 + (z - 1/2)^2 = 1/4$ umschreiben, die Gleichung einer Hyperbel mit Zentrum in $(0, 1/2)$.

2 Calyx

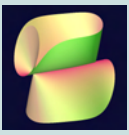
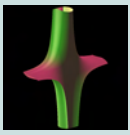
Die Fläche *Calyx* mit Gleichung $x^2 + y^2z^3 = z^4$ hat eine Gerade als singulären Ort. Der untere Teil der Fläche hat spitzenartige Singularitäten entlang dieser Geraden, wohingegen der obere Teil die Gerade in einem Punkt, dem Ursprung, tangential berührt. Das reelle Bild ist insoweit irreführend, als dass das definierende Polynom irreduzibel ist und die Fläche daher aus nur einer algebraischen Komponente besteht (und nicht aus zwei Komponenten, wie die Abbildung suggeriert).

Man kann zeigen, dass Calyx eine geeignete Projektion von *Calypso* ist. Hierbei wird eine Zylinderfläche im dreidimensionalen Raum auf die singuläre Gerade von Calyx kontrahiert. Algebraisch ist die Abbildung durch die Vorschrift $(x, y, z) \to (xz, y, z)$ gegeben. Sie ist sehr einfach. Die entsprechende Substitution in $x^2 + y^2z^3 = z^4$ und anschließendes Kürzen von z^2 liefert die Gleichung $x^2 + y^2z = z^2$ von Calypso.

3 Daisy

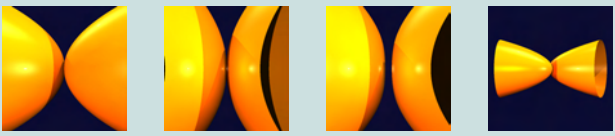
Aus der Gleichung $(x^2 - y^3)^2 = (2z^2 - y^2)^3$ von *Daisy* schließt man durch Differentiation, dass der singuläre Ort aus zwei (ebenen) Spitzkurven besteht, die sich in ihrem gemeinsamen singulären Punkt transversal treffen. Um die Singularitäten besser zu verstehen, konstruiert der Geometer ihre *Auflösung* mittels *Explosionen*. Sie liefern in endlich vielen Schritten eine Fläche ohne Singularitäten (eine Mannigfaltigkeit), zusammen mit einer Abbildung auf die ursprüngliche Fläche, die diese als Schatten der Mannigfaltigkeit unter einer Projektion interpretiert.

Links wurde der Ursprung von Daisy explodiert. Die nächste Explosion längs der mittleren Geraden macht die tangentiale Berührung der Komponenten transversal, die begrenzende vertikale Parabel wird zur Geraden. Rechts die Ansicht dieser Fläche im Unendlichen. Die Singularitäten werden dann solange vereinfacht, bis sie gänzlich eliminiert sind.

4 Diabolo

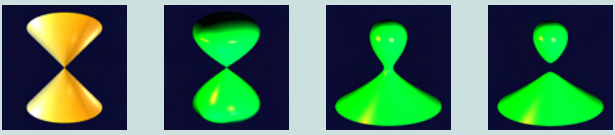
Die Gleichung $x^2 = (y^2 + z^2)^2$ von *Diabolo* zerfällt in das Produkt $(x - y^2 - z^2)(x + y^2 + z^2) = 0$. Folglich ist die zugehörige Fläche die Vereinigung der beiden einschaligen Drehhyperboloide $x = \pm(y^2 + z^2)$. Sie berühren sich im Nullpunkt tangential. Die Berührung erkennt man algebraisch am übereinstimmenden linearen Term x in den beiden Faktoren. Die Tangentialebene ist die vertikale Ebene $x = 0$.



Die Streifen in den Abbildungen sind Schatten, die von der Beleuchtung herrühren. Stört man die Gleichung von Diabolo durch Addition eines konstanten Terms wie in $x^2 = (y^2 + z^2)^2 + 1/1000$, so werden die beiden Hälften getrennt. Die Substitution von x durch $x + y$ liefert hingegen die Variation $(x + y)^2 = (y^2 + z^2)^2$ der Gleichung. Sie verschiebt die beiden Schalen schräg zueinander (rechte Abbildung).

5 Dingdong

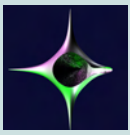
Die durch $x^2+y^2+z^3 = z^2$ definierte Fläche *Dingdong* repräsentiert den einfachsten Typ einer Flächensingularität, den sogenannten gewöhnlichen Doppelpunkt, mit lokaler Gleichung $x^2+y^2 = z^2$. Das ist der Doppelkegel. In der Nähe des Ursprungs 0 ähnelt Dingdong diesem Kegel, da für kleine z der Term z^3 gegenüber z^2 vernachlässigbar wird. Gleichzeitig ist Dingdong eine Drehfläche: Eine in einer vertikalen Ebene liegende, um 90 Grad gedrehte α-Schleife rotiert um die vertikale z-Achse, ihre Symmetrieachse.



Die zweite Abbildung zeigt die Fläche *Octdong* $x^2 + y^2 + z^4 = z^2$, die oben und unten geschlossen ist. Die beiden Figuren rechts haben Gleichung $x^2 + y^2 + z^3 = z^2 \pm 1/100$. Die Singularitäten sind verschwunden, das Vorzeichen der Konstanten $1/100$ entscheidet, ob die Fläche zusammenhängt oder in zwei Teile zerfällt.

6 Distel

Die Fläche *Distel* mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + c \cdot (x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) = 1$ besticht durch ihr hohes Maß an Symmetrie. Für das tatsächliche Bild wurde der Koeffizient c sehr gross gewählt. Die sechs Zacken befinden sich auf den drei Koordinatenachsen des euklidischen Raumes. Jede Drehung, die die drei Achsen in sich selbst überführt, lässt auch Distel unverändert. Die Symmetriegruppe ist also die des Würfels und des zu ihm dualen Oktaeders, zwei der fünf platonischen Körper.



Es ist schon erstaunlich, dass es nicht möglich ist, vollkommen regelmäßige Sterne wie Distel mit beliebig vielen Zacken zu konstruieren. Dies folgt aus Überlegungen der Gruppentheorie. Es sind nur vier, sechs, acht, zwölf oder zwanzig Spitzen möglich, gemäß der Anzahl der Seiten der platonischen Körper. Wir überlassen es dem neugierigen Betrachter, für all diese Sterne die passenden Gleichungen zu finden.

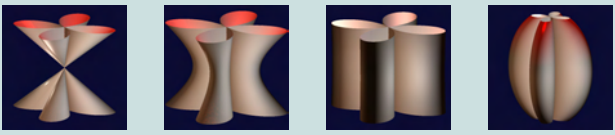
7 Dullo

Die Fläche *Dullo* ist ein Schwimmreifen, den man solange aufgeblasen hat, bis er sich innen selbst berührt. Etwas mathematischer ausgedrückt heißt das, dass in der Gleichung des Torus $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$ beide Radien R und r gleich groß gewählt wurden. Im Ursprung ergibt sich damit eine Singularität, die von zwei sich vertikal berührenden Spitzen gebildet wird.

Das linke Bild zeigt eine Innenaufnahme von Dullo. Das mittlere Bild illustriert den Fall, dass R knapp größer als r ist. Dies ist ein echter Torus, insbesondere treten keinerlei Singularitäten auf. Er ist also eine Mannigfaltigkeit. Eine Ameise, die sich außerhalb des Torus befindet, kann durch die schlauchartige Verengung kriechen. Das rechte Bild zeigt die Situation für $R < r$. Nun überschneiden sich die Innenwände des Torus, es bilden sich zwei übereinander liegende Singularitäten.

8 Eistüte

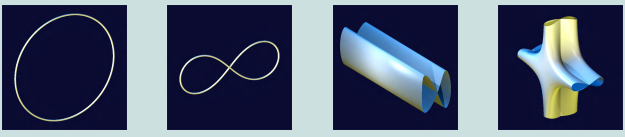
Der horizontale Schnitt von *Eistüte* ist eine Kurve, die viermal durch den Ursprung läuft, und dabei entweder an sich selbst tangential ist oder sich senkrecht schneidet. Es ist dies eine sogenannte Rosettenkurve: Ein kleines Rad rollt im Inneren eines Kreisringes ab. Ein auf dem Rad befestigter Bleistift zeichnet dabei eine Kurve. Je nach dem Verhältnis der beiden Radien bilden sich verschiedene Kurven. Die Kurve schließt sich genau dann, wenn das Verhältnis eine Bruchzahl ist. In unserem Fall ist es der Vierklee.



Die Fläche selbst verjüngt sich in der Mitte. Dieses Zulaufen wird durch zwei Parameter reguliert. Setzt man den ersten Null, ist der Verlauf geradlinig wie in der linken Abbildung. Dies ist der Kegel über der Vierkleekurve. Für andere Parameterwerte verdickt sich die Fläche, wird zum Zylinder über der Vierkleekurve und beult sich schließlich fassartig aus wie in der rechten Abbildung.

9 Helix

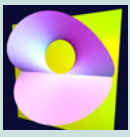
Die *Lemniskate* ist die ebene Kurve mit der Gleichung $y^4 + z^2 = y^2$. Diese ergibt sich aus dem Kreis $y^2 + z^2 = 1$, indem man z durch z/y ersetzt. Geometrisch entspricht die Substitution der einmaligen Verwindung des Kreises zur Achterschleife. Fasst man $y^4+z^2 = y^2$ als Gleichung in den drei Variablen x, y und z auf (wobei x blinder Passagier ist), so ist die Lösungsmenge eine Fläche im drei-dimensionalen Raum, nämlich der Zylinder über der Lemniskate.



Die Gleichung $y^4 + x^2z^2 = y^2$ von *Helix* erhält man nun, indem z durch xz ersetzt wird. Geometrisch gesehen ist diese Konstruktion eine Art Faltung. Die Symmetrie bezüglich x und z ist klar erkennbar. Der singuläre Ort ist ein Kreuz von Geraden. Die Schnitte von Helix mit den Ebenen $x = c$ oder $z = c$ sind für $c \neq 0$ Lemniskaten, die Schnitte $y = c$ sind hingegen Hyperbelpaare.

10 Herz

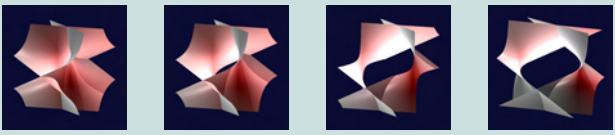
Trotz der einfachen Gleichung $y^2 + z^3 = z^4 + x^2z^2$ besitzt die Fläche *Herz* eine subtile lokale und globale Struktur. Der singuläre Ort ist eine Gerade, längs der sich die Fläche selbst schneidet. Der Ursprung 0 ist der interessante Punkt: Wir schneiden Herz mit Ebenen $x = c$ orthogonal zur singulären Geraden. Es entsteht eine Schleife, die sich wie ein Knoten zusammenzieht, wenn c gegen 0 strebt. Dadurch kommt es zur Trichterbildung.



Von der Ferne betrachtet sehen wir eine kreisförmige Öffnung in der Fläche. Der Schnitt mit der vertikalen xy-Ebene ist in der Tat ein Kreis. Die Schlichtheit der Fläche bedingt, dass wir ihre Gestalt erfassen und uns merken können. Mit geschlossenen Augen vergegenwärtigen wir uns sofort die Figur in jedem Detail. Viel schwieriger ist es, die geometrischen Verhältnisse mit Worten einem Dritten mitzuteilen. Die geeignete Sprache fehlt.

11 Himmel & Hölle

Diese Figur ist algebraisch einfach, sie besteht aus zwei glatten Komponenten mit den Gleichungen $x + yz = 0$ und $x - yz = 0$. Diese schneiden sich transversal längs der y- und z-Achse, welche zugleich den singulären Ort bilden. Durch Verschiebung kann man die Komponenten trennen.



Die Abbildungen zeigen den Teil der Fläche, der sich innerhalb eines nicht abgebildeten Würfels befindet. Die Randlinien sind Hyperbeln, die in den ebenen Seitenflächen des Würfels liegen.

Ein Blatt Papier wird gefaltet und dann so von unten gehalten, dass man vier Finger in die vier entstandenen Ecken stecken kann. Durch Spreizen der Finger öffnet sich die Form auf zwei verschiedene Arten, man sieht jeweils zwei der vier inneren Seiten, die blauen für den Himmel, die roten für die Hölle. Die Kinder raten, welche Farbe erscheinen wird.

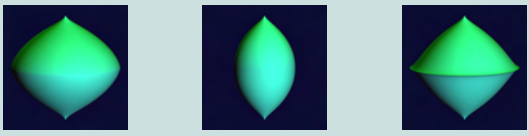
12 Kolibri

Wie man sich leicht überzeugt, ist *Kolibri* eine auf den Kopf gestellte Nahaufnahme von *Herz* in der Nähe des Ursprungs. Die Gleichung ist $x^3 + x^2z^2 = y^2$, man vergleiche mit der Formel $y^2 + z^3 = z^4 + x^2z^2$ von Herz. Ersetzt man in letzterer x durch z und z durch $-x$, lässt sich das Monom x^4 durch einen Koordinatenwechsel eliminieren, sodass die Gleichung von Kolibri resultiert.

Der Kolibri ist als einer der kleinsten Vögel mit beeindruckenden Fähigkeiten ausgestattet. Seine Flügel vermögen bis zu 200 mal pro Sekunde zu schlagen, sodass er in der Luft still stehen bleiben kann. Diese Aktivität verbraucht sehr viel Energie, der Kolibri muss daher täglich das Doppelte seines Körpergewichts an Nahrung aufnehmen. Ohne ständige Kalorienzufuhr würde er innerhalb weniger Stunden verhungern. In der nächtlichen Ruhephase senkt er seine Körpertemperatur wesentlich, um an Energie zu sparen.

13 Kreisel

Die Gestalt des *Kreisels* als Lösungsmenge einer einfachen algebraischen Gleichung darzustellen ist eine kleine mathematische Bastelei. Es ist auch mathematisch nicht sofort einsichtig, wie diese Gleichung auszusehen hat, abgesehen davon, dass sie nicht eindeutig sein muss: Verschiedene Gleichungen können ähnliche Formen liefern.



Im großen Bild wurde die Gleichung $60(x^2+y^2)z^4 = (60-x^2-y^2-z^2)^3$ gewählt. Die Rotationssymmetrie um die vertikale z-Achse erkennt man am Auftreten von x und y im quadratischen Polynom x^2+y^2. Die dritte Potenz auf der rechten Seite ist notwendig, um die beiden Spitzen zu erzeugen. Und da z nur mit geraden Potenzen vorkommt, ist die Fläche symmetrisch bezüglich der Spiegelung an der horizontalen xy-Ebene.

Der zweimalige Parameter 60 zur Balance der Proportionen hat ästhetische Gründe. Wie lauten die Gleichungen für die drei kleinen Figuren?

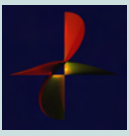
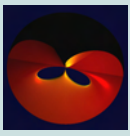
14 Limão

Diese Fläche mit der Gleichung $x^2 = y^3 z^3$ ist nur schwer in ansprechender Weise zu visualisieren. Sowohl die Beleuchtung als auch die Ausformung in der Nähe des Ursprungs machen Probleme. Die Abbildung soll ja möglichst authentisch die Figur wiedergeben. Dies hängt von der Geometrie und vor allem vom Blickwinkel der Kamera ab. Hin und wieder entstehen Artefakte wie Ausfransungen oder melierte Färbungen, die nicht der mathematischen Realität entsprechen. Auch Reflexionen können störend wirken.

Links erkennt man solche Artefakte. Längs der Kanten bilden sich in der Nähe des Schnittpunktes Nebel, trotz der Qualität des Programms POV-Ray. Das Problem liegt vielmehr in der Komplexität, Gleichungen in der Nähe von singulären Punkten zu lösen. Die sogenannte Auflösung der Singularitäten, die eine Parametrisierung der Fläche liefert, kann hier in vielen Fällen weiterhelfen.

15 Miau

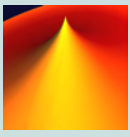
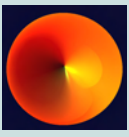
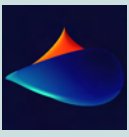
Diese Fläche wurde durch Probieren auf einer eher eintönigen Zugfahrt gefunden (arbeiten mit Povray lässt die Zeit sehr schnell vergehen). Die Konstellation ist aber keineswegs zufällig – im Gegenteil, wollte man für diese Fläche die algebraische Gleichung systematisch herleiten, stieße man wohl auf unüberwindbare Probleme.

Der Reiz von *Miau* ist natürlich die doppelte Öffnung mit eingelagerter Singularität. Der Grund für dieses Phänomen liegt in der eher unüberschaubaren Gleichung $x^2yz+x^2z^2+2y^3z+3y^3=0$. Es gibt diverse Techniken (Jacobi-Ideal, Lokalisierung, Tangentialkegel, ...), um aus einer derartigen Formel die lokale Gestalt der Fläche in der Nähe eines ausgewählten Punktes zu studieren und zu erkennen, ohne ein Visualisierungsprogramm zu verwenden. Die Analyse der globalen Geometrie ist ungleich schwieriger und u.a. Aufgabe der Algebraischen Topologie.

16 Nepali

Wir betrachten die definierende Gleichung $(xy-z^3-1)^2 = (1-x^2-y^2)^3$ von *Nepali*. Die Symmetrie zwischen x und y wird verstärkt durch das quadratische Polynom $x^2 + y^2$, das rotationssymmetrisch ist, im Gegensatz zum Monom xy. Schnitte mit den horizontalen Ebenen $z = c$ liefern geschlossene Kurven, die annähernd Kreise sind. Das gleichzeitige Auftreten von Quadraten und dritten Potenzen bewirkt das spitze Zulaufen am Gipfel.

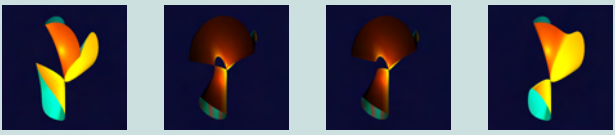




Die seitliche Berandungskurve von Nepali ist kein exakter Kreis, sondern wölbt sich auf und ab wie die Krempe eines Hutes. Ihre Projektion auf die horizontale xy-Ebene ist indessen ein Kreis, wie man an der Draufsicht erkennt.

Die gezeigte Fläche ist beschränkt, sie musste also nicht mit einem Würfel oder einer Kugel geschnitten werden. Diese Tatsache ist aus der Formel durch eine sorgfältige Analyse direkt herleitbar.

17 Seepferdchen

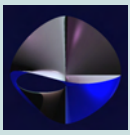
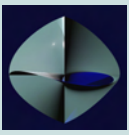
Die Gleichung von *Seepferdchen* im grossen Bild wurde der Schönheit zuliebe etwas zurecht gerückt. Denn $(x^2 - y^3)^2 = (x + y^2)z^3$ ergibt $x^4 - 2x^2y^3 + y^6 = xz^3 + y^2z^3$, die in Wirklichkeit verwendete Gleichung ist $x^4 - 2.5x^2y^3 + y^6 = xz^3 + y^2z^3$. Diese Modifikation des Koeffizienten c von x^2y^3 ist signifikant, denn die zur Gleichung $(x^2 - y^3)^2 = (x + y^2)z^3$ gehörige Figur sieht etwas anders aus (siehe die beiden Abbildungen links).



Das zweite Bild aus der Ferne entlarvt den Schwindel endgültig. Die beiden Bilder rechts daneben zeigen die weitere Entwicklung, wenn der Koeffizient c auf $-1,999$ bzw. -1 übergeht. Wir sehen die sprunghafte Veränderung der Geometrie beim kritischen Wert -2. Man hat den Eindruck, dass die Fläche für $c = -2$ unter enormer Spannung steht. Geringfügiges Unterschreiten dieses Wertes setzt die eben noch gebundene potentielle Energie frei.

18 Solitude

An der Gleichung $x^2yz+xy^2+y^3+y^3z = x^2z^2$ von *Solitude* lässt sich die versteckte geometrische Vielfalt nicht erkennen. Ebenso zeigt das große Bild nur einen Teil der Phänomene. Aufschlussreich ist hingegen eine Kamerafahrt rund um die Fläche, wie sie im Film “ZEROSET – I spy with my little eye" zu erleben ist. Hier begnügen wir uns mit vier verschiedenen Ansichten.

Offensichtlich gibt es zwei Öffnungen, eine größere, gut sichtbare, sowie eine kleinere, die man bei der ersten Perspektive nicht vermuten würde. Der Blick von oben zeigt die vertikale singuläre Gerade, längs der horizontale Schnitte eine spitze Kurve erzwingen.

Am Beispiel von Solitude erkennt man die Komplexität des Problems, aus der Gleichung die sichtbare reelle Geometrie zu deduzieren. In ähnlicher Weise kann man die zugrunde liegende komplexe oder zahlentheoretische Geometrie hinterfragen.

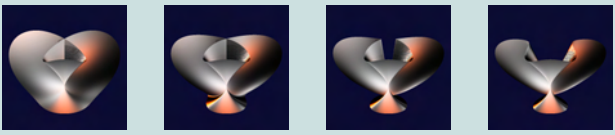
19 Tanz

Die Gleichung $2x^4 = x^2 + y^2z^2$ von *Tanz* liefert bei Einsetzen von $z = 0$ die Gleichung $2x^4 = x^2$. Dies ist der Schnitt von Tanz mit der horizontalen xy-Ebene. Umschreiben ergibt die Gleichung $x^2(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) = 0$ von drei parallelen Geraden. Wir beobachten hier ein typisch reelles Phänomen: Die Gerade $x = z = 0$ gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $2x^4 = x^2 + y^2z^2$ von Tanz, ist aber eine isolierte, eindimensionale Komponente. Denn für x nahe 0 gibt es nur die Lösungen $x = y = 0$ oder $x = z = 0$, also das Achsenkreuz bestehend aus der y- und z-Achse.

Geraden sind unendlich dünn. Sie werden daher vom Visualisierungsprogramm übersehen, bzw. nicht eingezeichnet. Man muss also die Existenz von eindimensionalen Komponenten in der Lösungsmenge vorher rechnerisch abklären und sie dann gegebenenfalls als dünne Zylinder in das Bild einfügen. Programme wie Surf machen das automatisch.

20 Taube

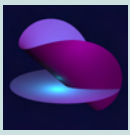
Für *Taube* lautet die erstaunliche Formel $256z^3 - 128x^2z^2 + 16x^4z + 144xy^2z - 4x^3y^2 - 27y^4 = 0$. Die Koeffizienten sind nicht zufällig. Im Gegenteil: Die Gleichung folgt aus einer anderen, allgemeineren Formel ab, der sogenannten Diskriminante. Diese beschreibt den Schatten einer Fläche oder Varietät, der bei der Projektion auf eine Ebene oder einen höher dimensionalen linearen Raum entsteht. Die Kontur ist durch die Fläche und die Projektion eindeutig festgelegt, und, algebraisch gesehen, auch die Gestalt ihrer Gleichung.



Die Bilder zeigen die Veränderung von Taube, wenn man den Koeffizienten 144 des Monoms xy^2z in der Gleichung verkleinert und sukzessive durch die Zahlen 72, 29, 14 und 0 ersetzt. Knapp über dem Wert 14 reisst die obere Öffnung auf und beginnt sich zu weiten. Diese Beobachtung lässt sich rechnerisch vorhersagen und exakt nachprüfen.

21 Tülle

Die Fläche *Tülle* konstituiert sich aus drei glatten Komponenten, die sich jeweils paarweise in einer (ebenfalls) glatten, ebenen Kurve schneiden. So erhält man drei Schnittkurven, und zwar eine Gerade und zwei Parabeln. Man beachte, dass diese Kurven sich tangential in 0 berühren.

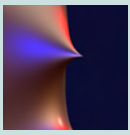
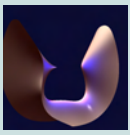
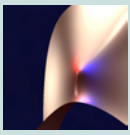


Wir haben hier das einfachste Beispiel einer Fläche mit drei paarweise transversalen Komponenten, sodass sich die Schnittkurven von je zweien nicht transversal schneiden. Die Fläche ist damit keine *Mikado-Varietät*.

Der transversale Schnitt von zwei glatten Komponenten einer Fläche – ein grundlegendes Konzept der Geometrie – lässt sich algebraisch präzise durch die sogenannte Idealtheorie in Formeln fassen. Mit ihr kann man ausgezeichnet rechnen und Beweise führen. Für singuläre Komponenten ist die richtige, der Anschauung entsprechende Definition von Transversaltät noch ausständig.

22 Vis-à-Vis

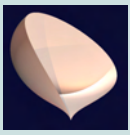
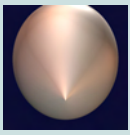
In *Vis-à-Vis* begegnen sich zwei wesentliche Begriffe der Algebraischen Geometrie. Es sind dies glatte und singuläre Punkte. Intuitiv ist aus der Betrachtung der Fläche klar, worin der Unterschied besteht. Haben wir links eine (isolierte) Singularität, so ist die rechtsseitige Wölbung überall glatt.

Aus der Gleichung $x^2 - x^3 + y^2 + y^4 = z^3 + z^4$ lassen sich durch Differenzieren nach den drei Variablen alle singulären Punkte mühelos bestimmen. Wie der Name besagt, sind sie *besonders*, und damit *selten*. In der Tat können bei einer algebraischen Fläche die singulären Punkte nur entweder isoliert sein (das heißt, in der unmittelbaren Umgebung des Punktes gibt es keine weiteren), oder eine Kurve bilden (wie es etwa bei *Daisy* der Fall ist). Diese Kurve der singulären Punkte der Fläche kann selbst wieder in speziellen Punkten singulär sein.

23 Zeck

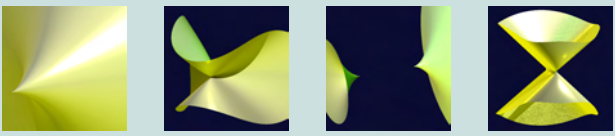
Die einfache Gleichung $x^2 + y^2 = z^3(1-z)$ von *Zeck* bestimmt, wie bei den anderen Flächen, vollkommen die Geometrie. Das heisst, sowohl die singulären Punkte wie auch die äußere Gestalt, die Krümmung und die Ausdehnung werden durch die vier Monome x^2, y^2, $-z^3$ und z^4 eindeutig festgelegt. Damit ist die Formel ein sehr effizienter Code, um kompliziert aussehende Formen zu chiffrieren. Allerdings ist die geometrische Information nicht immer schnell aus der Formel ablesbar.

Die lokale Gestalt der Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes lässt sich meistens explizit bestimmen, die Techniken der Lokalen Analytischen Geometrie greifen gut. Die Feststellung der globalen Struktur erfordert wesentlich mehr Aufwand und kann nicht immer befriedigend durchgeführt werden. Die kleinen Bilder zeigen Nahaufnahmen der Singularität, den Schnitt mit einer Ebene, und eine Draufsicht.

24 Zitrus

Die Gleichung $x^2 + z^2 = y^3(1 - y)^3$ von *Zitrus* ist ebenso einfach wie die Figur selbst. Zwei spiegelsymmetrisch angeordnete Spitzen rotieren um die durch sie gehende Achse. Die durch Weglassen von $(1 - y)^3$ vereinfachte Gleichung $x^2 + z^2 = y^3$ sorgt für genau eine Spitze, und $x^2 + z^2 = (1 - y)^3$ liefert das Spiegelbild. Beide sind unendlich ausgedehnte Flächen. Das Produkt auf der rechten Seite der ursprünglichen Gleichung bewirkt, dass Zitrus beschränkt bleibt. Man sieht dies leicht ein: Wird y dem Betrag nach größer als 1 und damit die rechte Seite negativ, so erlaubt die Gleichung keine reellen Lösungen für x und z.



Die drei weiteren Bilder illustrieren das Verhalten der Lösungen bei Veränderung der Vorzeichen in der Gleichung. Von links nach rechts sind die Flächen von $x^2+z^2 = (1-y)^3$, $x^2-z^2 = (1-y)^3$, $x^2+z^2 = -y^3(1-y)^3$ und $x^2+z^2 = y^3(y-1)^3$ abgebildet.