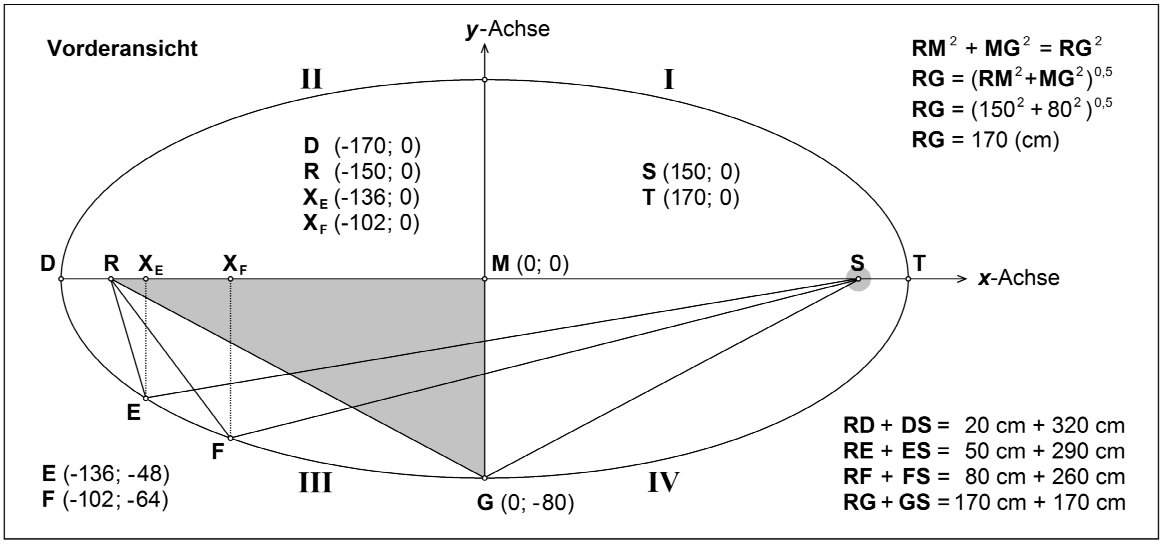
Elliptische Mechaniken.

In diesem Objekt sind fünf unterschiedliche Methoden zur Erzeugung einer Ellipse realisiert. Sie sind auf die vier Quadranten (**I**, **II**, **III**, **IV**) eines cartesischen Koordinatensystems verteilt (Figur 1). Der Mittelpunkt **M** der Ellipse befindet sich im Koordinatenursprung. Die Verwendung pythagoräischer Tripel im Zusammenhang mit einem metrischen Maßsystem ist didaktisch motiviert. Durch die Ganzzahligkeit können die trigonometrischen Rechnungen gut nachvollzogen und eindeutig nachgemessen werden.

Der Bau des Objekts ist gut für ein schulisches Projektseminar geeignet. Bei der Wahl des Aufstellungsortes sollte berücksichtigt werden, dass der rechte Teil des Objekts in den Raum hineinragt (Figur 2).

Technisch wichtig ist ein solider Drehpunkt im Ellipsenmittelpunkt **M**, eine exakte Positionierung der beiden Laufschienen (Figur 5) und eine stabile Halterung für die Plexiglasplatte und das Guckloch (Figur 3a und 3b), unabhängig davon, ob das Objekt als temporäre oder dauerhafte Installation geplant ist.



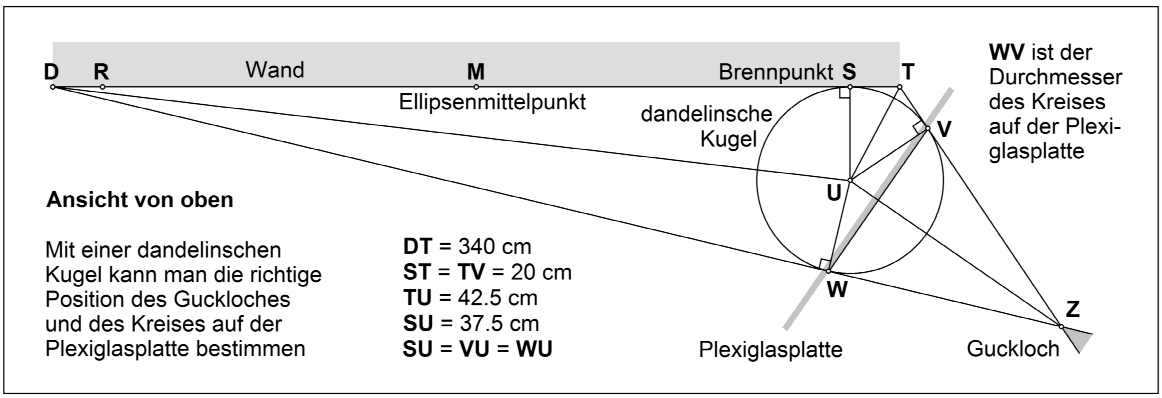
Figur 1

Obwohl die Geometrie des Objekts festgelegt ist, sind Materialwahl und Ausführung nicht festgeschrieben worden, damit sie an die ortsbedingten oder auch finanziellen Gegebenheiten angepasst werden können. Das Originalobjekt wurde ausschließlich aus Altmaterialien bzw. universell verwendbaren Teilen aufgebaut.

Die Ellipse kann aus vier Hartfaserplatten von minimum 80 cm x 170 cm Größe zugeschnitten werden. Die Ellipsenform kann durch die sogenannte *Gärtnerkonstruktion* erzeugt werden. Hierbei wird eine nicht dehnbare Schnur mit einer freien Länge von 340 cm an zwei Schrauben mit einem Abstand von 300 cm befestigt und durch den zeichnenden Stift gespannt gehalten. Die Position der Schrauben entspricht den Ellipsenbrennpunkten **R** und **S** in Figur 1. Die angegebenen ganzzahligen Zentimetermaße sollten sehr genau eingehalten werden.

I. Ein vollständiger schräger Schnitt durch einen Kegel hat die Form einer Ellipse

In Figur 2 wird gezeigt, wie ein Kegel konstruiert werden kann, dessen Schnittfläche genau die in Figur 1 angegebene Ellipse ist. Die Grundlage dazu bildet eine bemerkenswerte Erkenntnis des Mathematikers Dandelin (1794–1847), die u.a. besagt, dass die größtmögliche, in eine abgeschnittene Kegelspitze einbeschreibbare Kugel die ellipsenförmige Schnittfläche in einem der Ellipsenbrennpunkte (hier **S**) berührt.



Figur 2

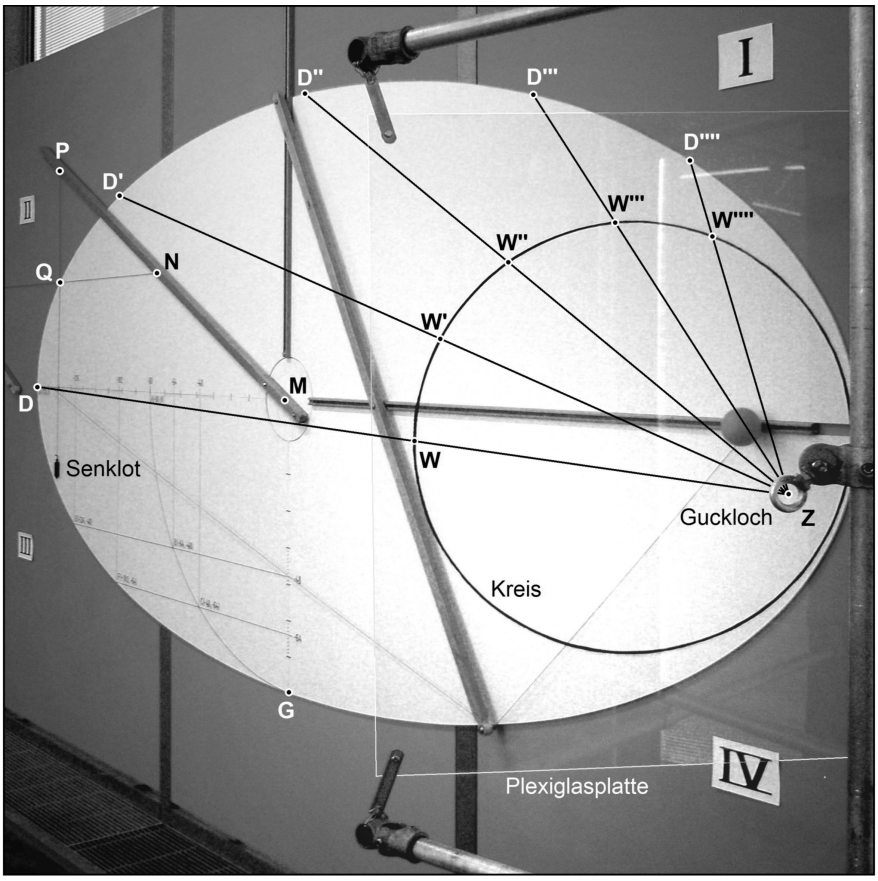
Für den Radius **SU** der dandelinschen Kugel ist ein Maß von 37,5 cm gewählt worden, so dass sich für die Strecke **TU** ein Maß von 42,5 cm ergibt. Für die Strecke **WV** resultiert eine Länge von 69,8346… cm.

Die Strecke **WV** ist der horizontale Durchmesser eines Kreises, der auf eine senkrechte Plexiglasplatte aufgezeichnet wurde. Figur 3a zeigt, wie die Plexiglasplatte mit dem aufgezeichneten Kreis (der durch die Perspektive horizontal verkürzt erscheint) von einem Gerüst gehalten wird. Das Gerüst ist zur Stabilisierung mit der Wand verschraubt. Das Guckloch am Punkt **Z** ist an der senkrechten Gerüststange befestigt.

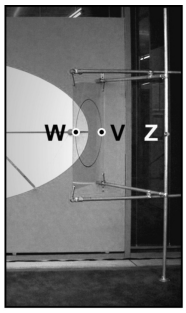
Der Punkt **Z** definiert, zusammen mit dem durch die Strecke **WV** bestimmten Kreis, einen Kegel, dessen Kegelmantellinien **ZW**, **ZW'**, … , **ZW''''** bis zu den Ellipsenpunkten **D**, **D'**, … , **D''''** verlängert werden können (Figur 3b). Die Strecken **W''D''**, **W'''D'''** und **W''''D''''** können zur Veranschaulichung des Kegels als Schnüre eingezogen werden, ohne dass die anderen beweglichen Teile des Objekts dadurch behindert würden.

Blickt man mit dem rechten Auge (und zugehaltenem linken) durch das Guckloch beim Punkt **Z,** dann füllt die weiße Ellipse den Kreis auf der Plexiglasscheibe exakt aus. Der Effekt ist verblüffend, selbst für diejenigen, die eigentlich nichts anderes erwarten.

Natürlich sind viele alternative Halterungen für die Plexiglasplatte und für das Guckloch vorstellbar. Zu beachten ist jedoch immer, dass beide absolut unverrückbar im Bezug auf die Ellipse installiert werden müssen.



(b)

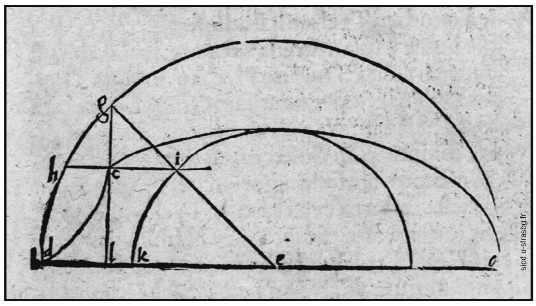


(a)

(c)

Figur 3

II. Ellipsenkonstruktion nach Johannes Kepler



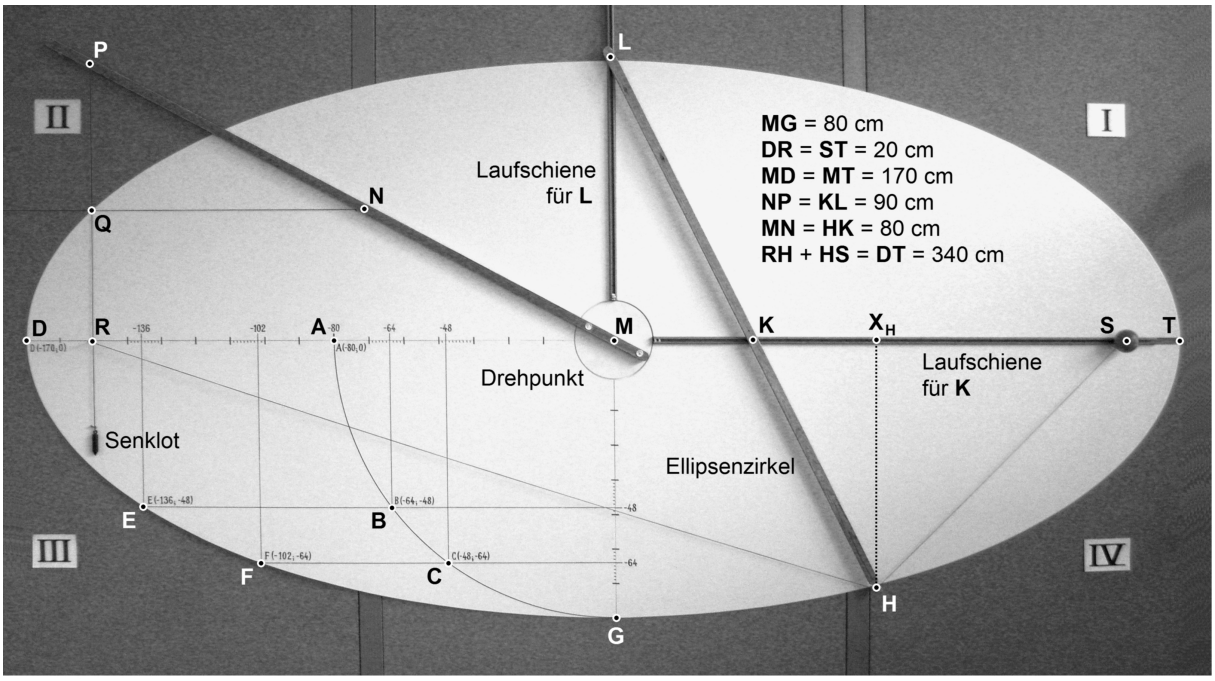
Figur 4

In Figur 3c ist der Stab, der im Punkt **M** drehbar gelagert ist, angehoben worden. Die Bewegung des Punkts **N** nach **N'** folgte dabei einem Kreis mit 80 cm Radius, die Bewegung des Punkts **P** nach **P'** einem Kreis mit 170 cm Radius. Im Gegensatz dazu führte der Weg des Schnurkreuzes vom Punkt **Q** genau an der Ellipse entlang zum Punkt **Q'.**

Figur 4 zeigt einen Holzschnitt aus dem im Jahre 1604 erschienenen Buch *Astronomiæ Pars Optica* des deutschen Astronomen und Mathematikers Johannes Kepler (1571–1630). Dieser Holzschnitt gab die Inspiration für die mechanische Realisierung.

Am linken Bildrand von Figur 3c ist zu sehen, dass die horizontale Schnur durch einen zweiten, drehbar gelagerten Stab gespannt wird. Seine effektive Länge von 80 cm entspricht der Strecke **MN** (bzw. **MN'**) des im Ellipsenmittelpunkt **M** drehbaren Stabs. Die Schnur bleibt in jeder Stabstellung horizontal, da der Abstand der Stabdrehpunkte gleich der Länge der Schnur ist. Die Strecke zwischen den beiden Drehpunkten stellt somit die fixierte Seite eines Parallelogramms dar, bei dem die drei anderen Seiten beweglich sind.

Die im Punkt **P** befestigte vertikale Schnur ist mit einem Senklot beschwert und entspricht der Geraden **gl** in Figur 4. Die horizontale Schnur, die in Figur 5 von **N** aus nach links führt, entspricht im Holzschnitt der Strecke **ih**, wohingegen der Kreuzungspunkt **c** dem Punkt **Q** im Schnurkreuz von Figur 5 entspricht.



Figur 5

III. Die Ellipse als horizontale Streckung eines Kreises

Im dritten Quadranten des Koordinatensystems ist die negative ***x***-Achse und die negative ***y***-Achse mit einer Zentimetereinteilung versehen. In diesem Quadranten ist ein Viertelkreis mit 80 cm Radius eingezeichnet, dessen Mittelpunkt sich in **M** befindet. Zu diesem Kreis gehören die Punkte **A**, **B** und **C**, deren ganzzahlige Koordinaten mit angegeben sind. Multipliziert man nun die ***x***-Koordinate dieser Punkte mit dem Faktor **f** = 17/8 = 2,125 und behält die ***y***-Koordinate bei, dann erhält man die Koordinaten der Punkte **D**, **E** und **F**, die exakt auf der Ellipse liegen (Figur 5). Die Ellipse entspricht also einer Streckung des Kreises in ***x***-Richtung mit dem Faktor **f** = 2,125.

Mit dieser Art der Streckung lässt sich auch die Ellipsengleichung herleiten. Die Gleichung des Kreises mit den Punkten **A**, **B** und **C** lautet: $x^2 + y^2 = 80^2$. Ersetzt man das ***x*** durch (***x*** / 2,125), so muss jeder ***x***-Wert um das 2,125-fache größer gewählt werden, um die Gleichung zu erfüllen. Das aber entspricht genau einer Streckung mit dem Faktor **f** = 2,125. Die Ellipsengleichung lautet also: $(x / 2{,}125)^2 + y^2 = 80^2$, bzw.: $x^2 / 170^2 + y^2 / 80^2 = 1$.

IV. Der Ellipsenzirkel und die Gärtnerkonstruktion

Die beiden Punkte **L** und **K** auf dem Stab des *Ellipsenzirkels* bewegen sich auf zwei Laufschienen, die in einem rechten Winkel zueinander montiert sind (Figur 5). Wenn der Stab bewegt wird, läuft der Punkt **H** dabei genau an der Ellipse entlang. Zusätzlich dazu hält ein in **H** befestigter Stift eine 340 cm langen Schnur, deren Enden in den Ellipsenbrennpunkten **R** und **S** befestigt sind, immer gleichmäßig gespannt. Wie schon eingangs erwähnt, wird die Erzeugung einer Ellipse mit einer Schnur die *Gärtnerkonstruktion* genannt.

Sind **L** und **K** auf dem Zirkelstab verstellbar, lassen sich damit verschiedenartige Ellipsen erzeugen. In diesem Objekt sind die Punkte **L**, **K** und **H** auf dem Stab festgelegt, mit **LK** = 90 cm und **KH** = 80 cm. Da die Dreiecke **KLM** und KHX_H zueinander ähnlich sind, folgt: $MK / KX_H = 9/8$, oder auch: $MX_H = 2{,}125\ KX_H$.

Wegen **KH** = 80 cm ist $HX_H^2 + KX_H^2 = KH^2$ eine Lösung der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 80^2$. Der Ellipsenzirkel streckt den ***x***-Wert KX_H des Kreises zum ***x***-Wert $MX_H = 2{,}125\ KX_H$ der Ellipse, indem er das Zentrum des Kreises von **M** nach **K** verschiebt. Aufgrund des Streckungsfaktors **f** = 2,125 ist **H** ein Punkt der dargestellten Ellipse.

Autor: Uli Gaenshirt, Nürnberg, Deutschland *Lizenz:* CC BY-NC-SA *Kontakt:* uli.gaenshirt@yahoo.de