

DUVAR KAĞIDI GRUPLARI

Fulya Taştan

Bir düzlemi (odanın zeminini, voleybol sahasını) bir çeşit karoyla kaplayabilmek için birbirinden bağımsız en azından iki yönde karoları ötelemek gerekir elbette. Bunu yapmanın ilk aklınıza gelen yolu muhtemelen Şekil 1'deki gibi olsa gerek. Oysa ne yazık ki (ya da ne güzel ki) düzlemi böyle iki ötelemeyle kaplamanın tek bir yolu yoktur. Bu yazıda, *duvar kağıdı* grupları olarak bilinen, düzlem üzerindeki birbirinden bağımsız iki öteleme simetrisine (ve daha da fazlasına) sahip periyodik döşemelerin simetri gruplarından bahsedeceğiz.

Simetrilere günlük hayatımızda, sanat tarihi boyunca antik mimariden modern sanata kadar ve hatta doğada sıkça rastlarız. Sezgisel olarak düzlem üzerindeki bir döşemenin simetrik olduğunu anlayabilsek bile, bunların simetrilerinin gerçekte neler olduğunu söyleyebilmek o kadar da kolay değildir. Bu döşemelerin matematiğini anlayabilmek için sahip oldukları simetrleri ölçecek bir yöntem geliştirilmelidir. Matematik dilinde, bir döşeme üzerindeki simetriyi, döşemenin görüntüsü korunarak yapılan sabit hareket olarak tanımlayabiliriz. Düzlem üzerinde dört çeşit simetri bulunmaktadır:

- (1) Öteleme simetrisi: doğrusal yönde sabit bir mesafedeki hareket;
- (2) Döndürme simetrisi: belli bir merkez etrafında belli bir açıyla döndürme hareketi;
- (3) Yansıma simetrisi: belli bir doğrultuda yerleştirilen aynada yansıma hareketi (cismin aynanın diğer tarafında oluşan görüntüsü anlamında);
- (4) Kayma-yansıma simetrisi: önce belli bir yönde öteleyip daha sonra öteleme yönüne paralel doğrultuda yansıma hareketi.

Düzlem üzerinde birbirinden bağımsız iki öteleme simetrisine (ve belki de birkaç başka simetriye) sahip döşemelere duvar kağıdı döşemeleri demiştik. Bir döşemenin simetrilerinin oluşturduğu kümeyi de o döşemenin simetri grubu olarak adlandırıyoruz. Bir kümenin bir grup olabilmesi için öncelikle üzerinde bir de işlem olması gerekir. Buradaki işlem, simetrleri ardı ardına yapma işlemi.

Matematikçiler duvar kağıdı döşemelerinin simetri gruplarına göre sınıflandırıldığını bilirler. Dolayısıyla bu döşemeleri sınıflandırmamız

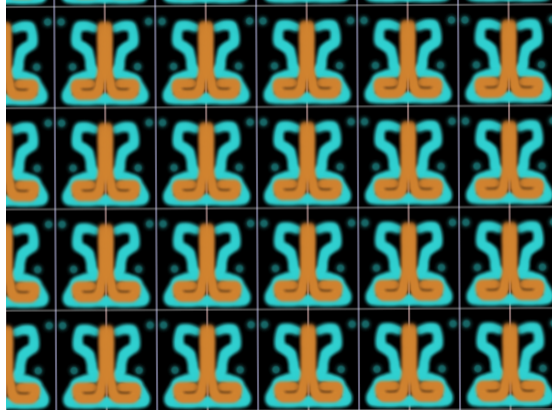
için onların simetri gruplarını incelemek gerekir. Farklı simetri grubuna sahip her döşeme farklı duvar kağıdı grubu ile anılır. Duvar kağıdı döşemeleri döşemede bulunan en küçük döndürme açısına göre sınıflandırılırlar. “Kristalografik kısıt” olarak adlandırılan bir özellikten dolayı döşemelerde döndürme simetrilerindeki açılar yalnızca 60, 90, 120, 180 derece olabilir ya da döşeme herhangi bir döndürme simetrisine sahip değildir. Döşemelerin sınıflandırılmasındaki en ilginç noktaysa, bu döşemelere ait sadece ve sadece 17 farklı simetri grubunun mümkün olmasıdır. Bu 17 simetri grubuna *duvar kağıdı grupları* denir.

Duvar kağıdı döşemeleri döşemeyi oluşturan temel bir bölgenin ötelemelerle tekrar edilmesiyle oluşturulur. Yani dikdörtgen, kare, altıgen veya eşkenar dörtgen biçiminde olabilen bu temel bölgeyi döşemenin karoosu olarak düşünebiliriz. Bu bölgeler duvar kağıdı gruplarının sınıflandırılmasında da etkin bir role sahiptir. Her bir duvar kağıdı grubu belli bir sembolle ifade edilir. Kristalografik gösterimde **p** sembolü döşemeyi oluşturan temel bölgeyi, **m** sembolü yansıma simetrisini, **g** sembolü kayma-yansıma simetrisini, **c** sembolü herhangi bir yansıma doğrusu üzerinde bulunmayan döndürme merkezinin varlığını ifade eder.

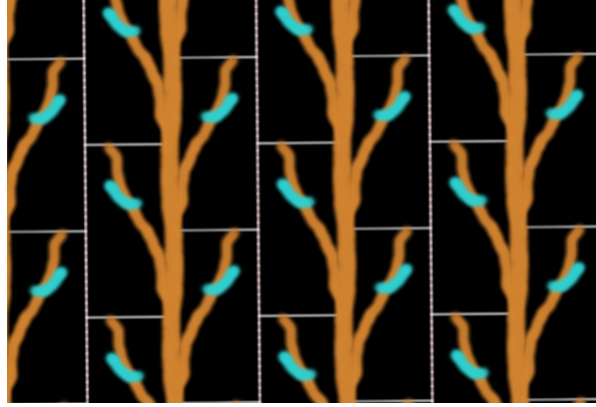
17 duvar kağıdı grubunun görsellerle ve kristalografik gösterimleriyle sınıflandırılması şöyledir:



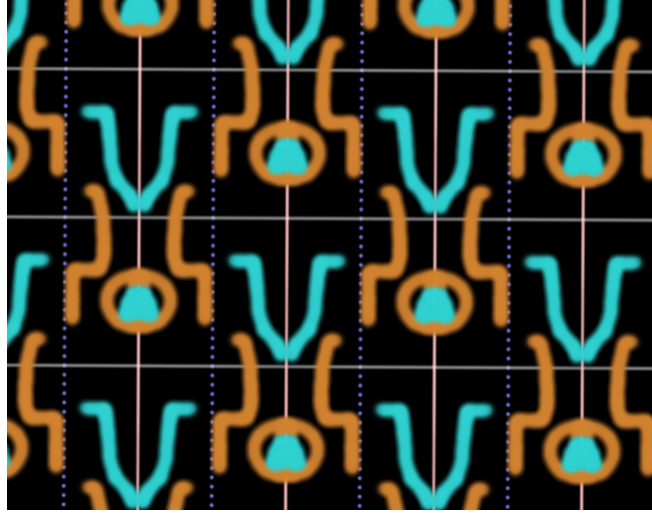
Şekil 1. p1 - Yalnızca birbirinden bağımsız iki öteleme simetrisi



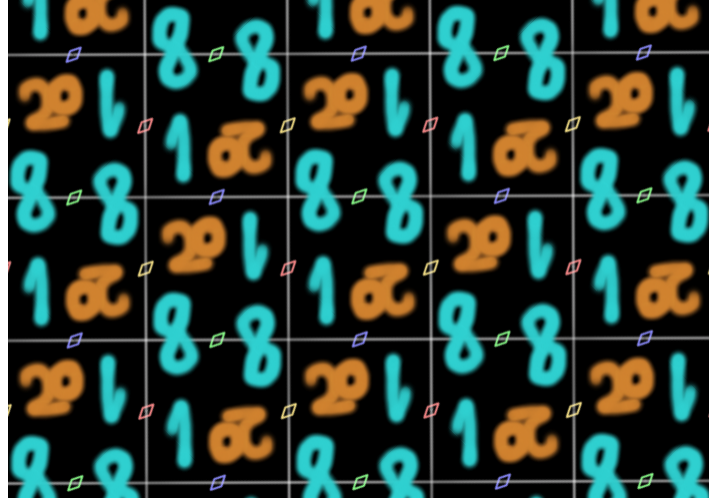
Şekil 2. pm: Birbirlerine paralel doğrularda olan iki yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



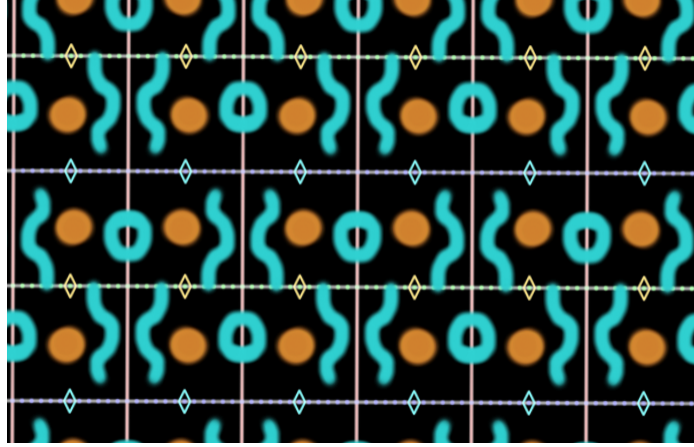
Şekil 3. pg: İki adet paralel doğrultuda kayma-yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



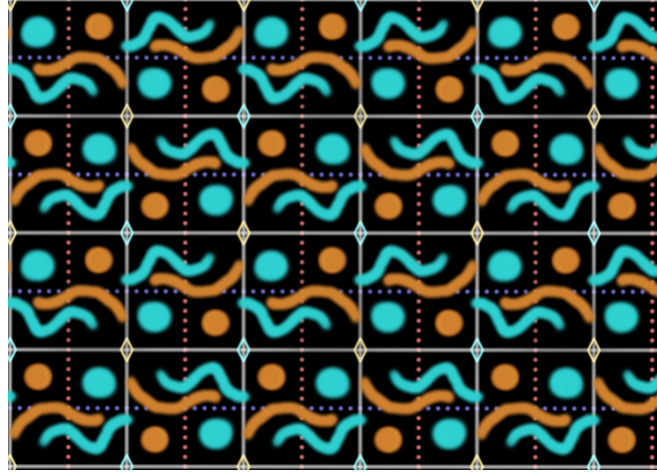
Şekil 4. cm : Bir yansıma simetrisi ile ona paralel olan bir kayma-yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



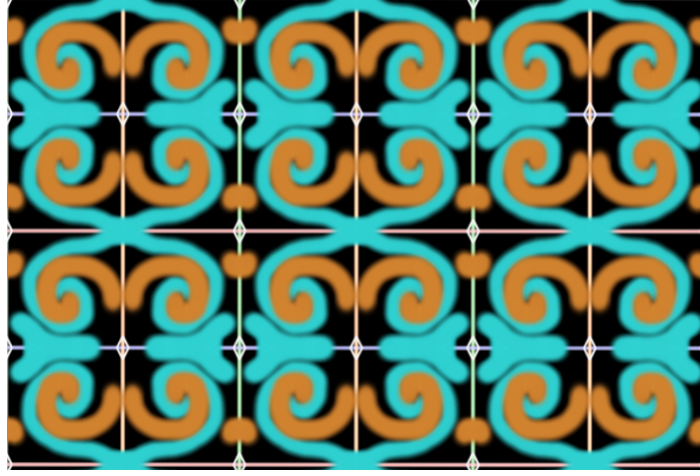
Şekil 5. $p2$: Yalnızca 180 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme



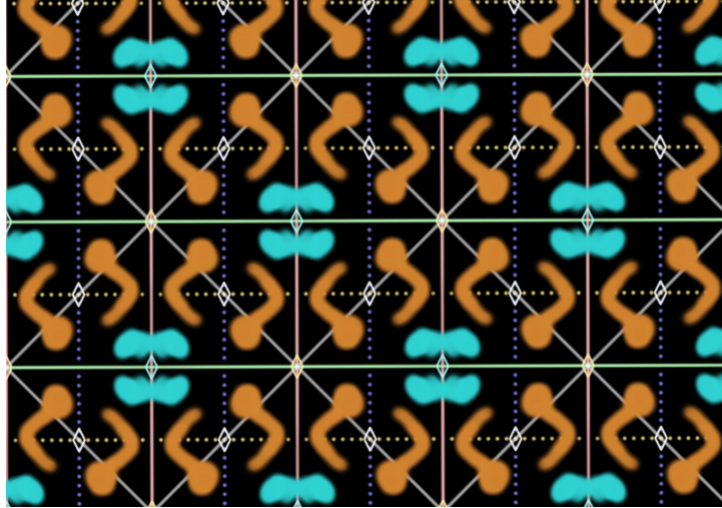
Şekil 6. pmg: 180 derecelik bir döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultuda bir yansıma ve bir kayma-yansıma simetrisi ve iki bağımsız öteleme



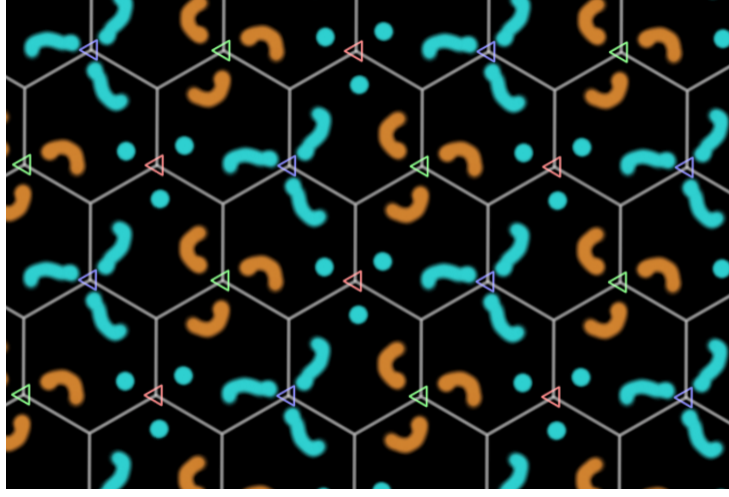
Şekil 7. pgg: 180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki kayma-yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



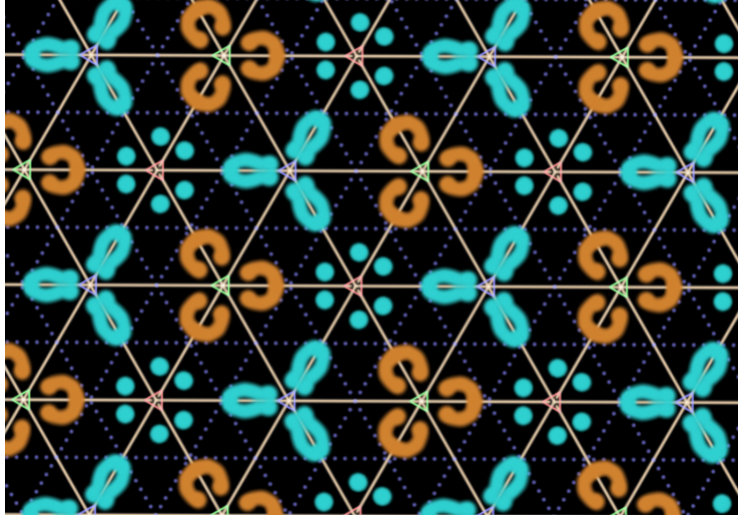
Şekil 8. pmm: 180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



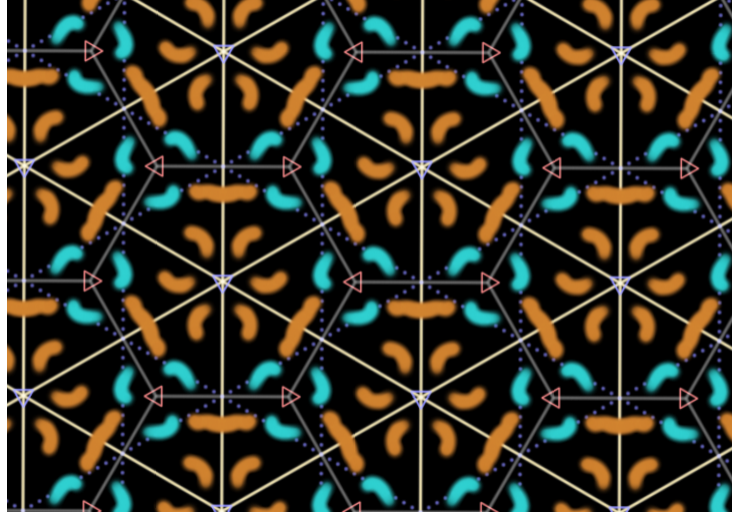
Şekil 9. cmm: 180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki yansıma ve iki kayma-yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



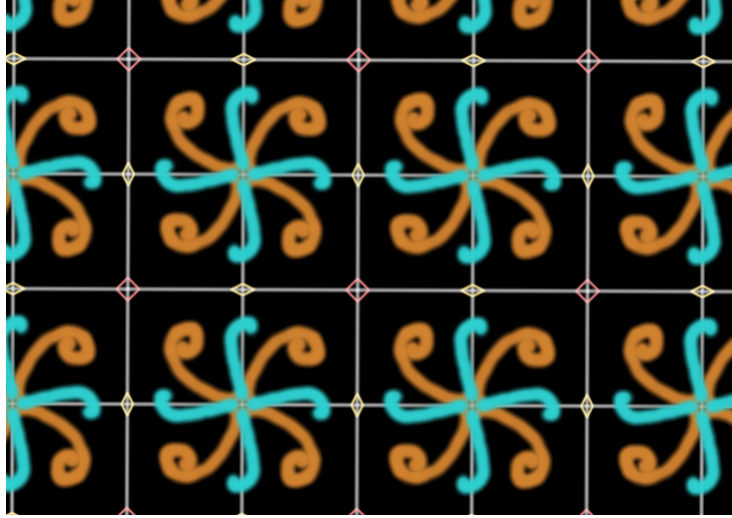
Şekil 10. $p3$: 120 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme



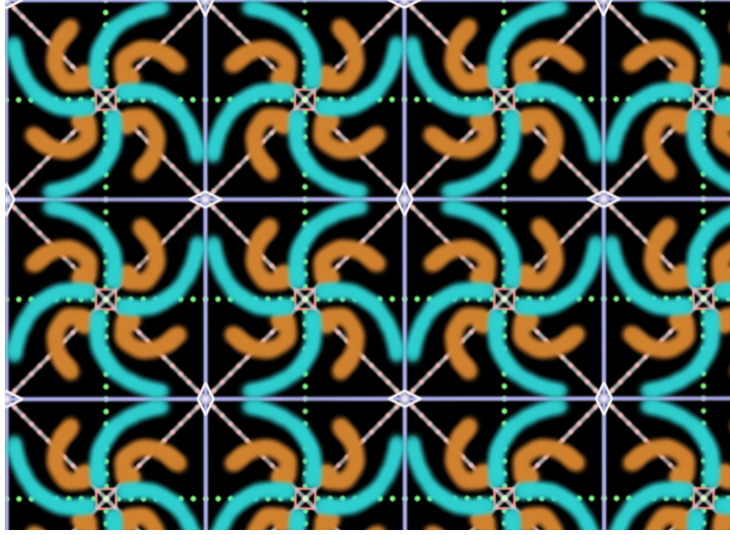
Şekil 11. $p3m1$: 120 derecelik döndürme simetrisi ile eşkenar üçgenin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



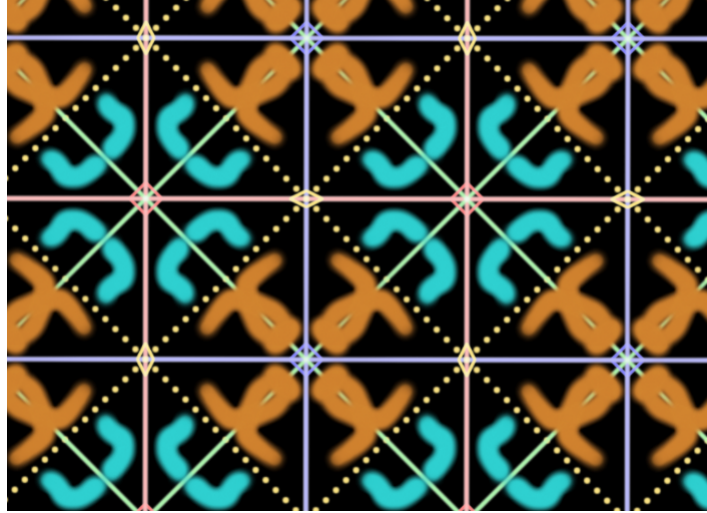
Şekil 12. $p31m$: 120 derecelik döndürme simetrisi yanında döndürme merkezi yansıma doğruları üzerinde olmayan bir 120 derecelik döndürme simetrisi ile yine eşkenar üçgenin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



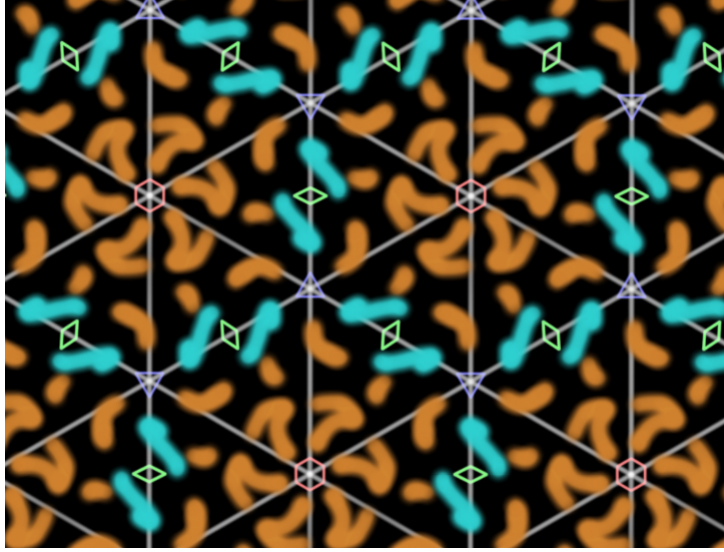
Şekil 13. $p4$: 90 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme



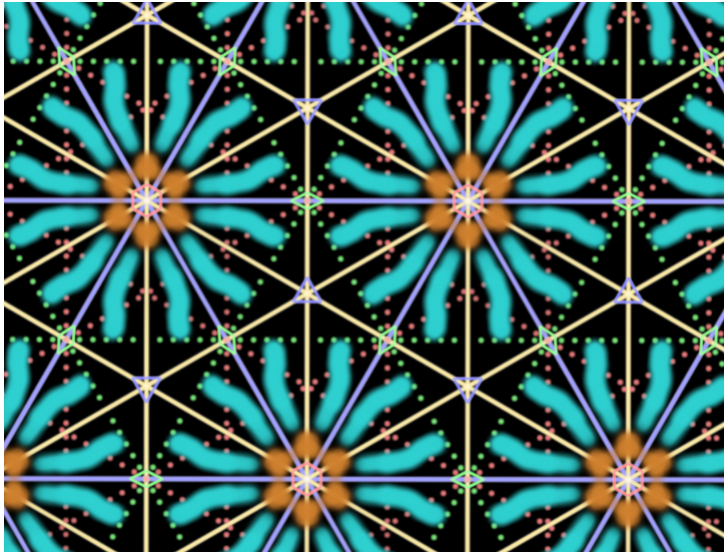
Şekil 14. p4g: 90 derecelik döndürme simetrisi yanında karenin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



Şekil 15. p4m: 90 derecelik döndürme simetrisi yanında 45° - 45° - 90° üçgeninin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme



Şekil 16. p6: Yalnızca 60 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme



Şekil 17. p6m: 60 derecelik döndürme simetrisi yanında 30° - 60° - 90° üçgeninin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme

Simetrilerin ardındaki matematiği anlayabilmek, matematiğin sanat ve kültür tarihine yaptığı katkının da anlaşılmasını sağlar. Endülüs'te bulunan Elhamra Sarayı'nın duvarlarında duvar kağıdı motiflerinin her bir çeşidini bulabilirsiniz. Elhamra'nın döşemelerinde, yaşadığımız şehirde, doğada, karmaşık ve fakat simetrik güzellikleri cebir ve geometri arasında bağlantı kurarak anlayabilmek, matematiği bir bütün olarak görmek açısından küçük ama son derece önemli bir adım olacaktır. Etrafımızdaki güzellikler matematik dilinden de konuşur.

Boęaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü