

資訊融入數學課程，以 Surfer 軟體為例

文 / 新北市文山國中蕭偉智

1.緣起

2015 年 12 月 6 日，筆者帶著敝校八年級數理資優學生參加新北市教育局所舉辦的「超越無限·數學印象—SURFER 程式之應用」研習課程，主講者為德國的數學家 Bianca Violet。Violet 介紹了 Imaginary 在德國的沿革，並且介紹了他們在世界各城市的數學與藝術展覽成果，她同時也介紹軟體 Surfer，並以「雪人 (snowman)」為素材，讓與會的學生及老師進行初步探索與創作。

研習課程結束後，筆者思考「該如何將這個軟體代入資優教育？」。資優課程設計需將學習經驗加以系統化的組織，安排適當的學習活動，以利學生學習；其學習經驗必須符合資優生的程度，才能引起其學習興趣；其學習結果應能展現高層思考和獨特的產出能力。因此，筆者期望透過循序漸近的方式進行 - 扣緊舊經驗、提問思考、學習新知識、動手實作，達到「數形結合」之目的，亦期望學生「知其然且知其所以然」。

鑒此，筆者設計了一個數學課程，以「畢氏定理及因式分解」為先備能力，進行五個階段的數學專題充實課程 (兩小時)。

2.資優數學 - 雪人課程

2.1 複習舊經驗：P(x₁, y₁), Q(x₂, y₂) 兩點距離公式 (國中課綱內容)

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2.2 提問與思考：圓方程 (新知識)

問題 1：直角坐標平面上與原點距離為 5 的點有哪些呢？

由於學習過畢氏定理，學生很快說出 (±5, 0), (0, ±5), (±3, ±4)，但是當學生點出這八個點後，他們察覺應該不僅這些八個點，而是無限多個點！

問題 2：這些滿足條件的點會形成什麼圖形？

問題 3：問題 1 中，該圓的方程式為何？

視情況可再引導提問：「利用兩點距離公式，請代數方程式描述『直角坐標平面上，P(x, y) 與原點 (0,0) 距離為 5』這句話。」

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 5$$

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

問題 4：給出多個圓的方程¹，請學生找出圓心及半徑，且觀察這些圓的位置關係。

$$\Gamma_1: x^2 + y^2 - 3 = 0$$

$$\Gamma_2: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0$$

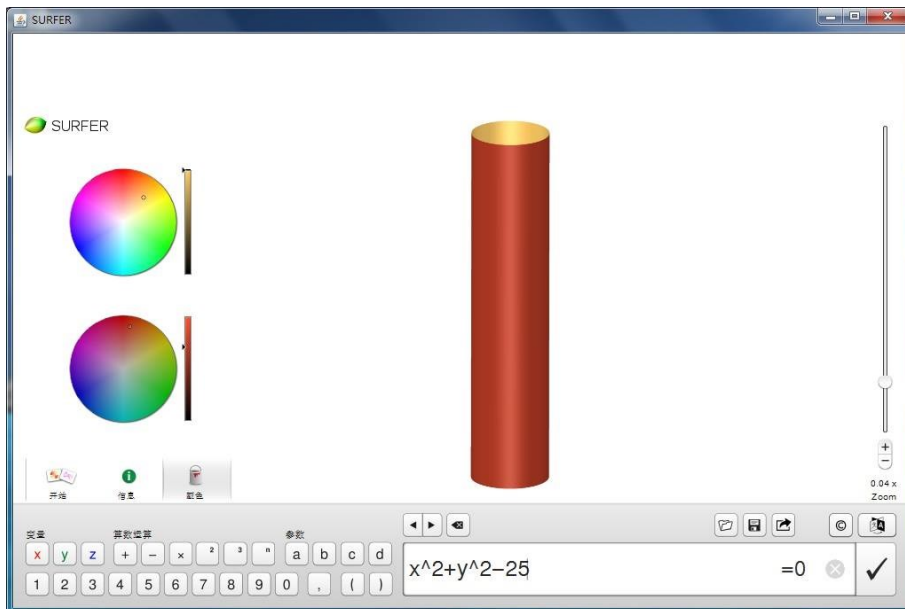
$$\Gamma_3: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 9 = 0$$

2.3 從平面到立體 (新知識)

問題 5：已知平面上 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ 是一個圓，若在立體空間中呢？

以教室牆角為例，告訴學生三維空間會多一個維度 z 軸。

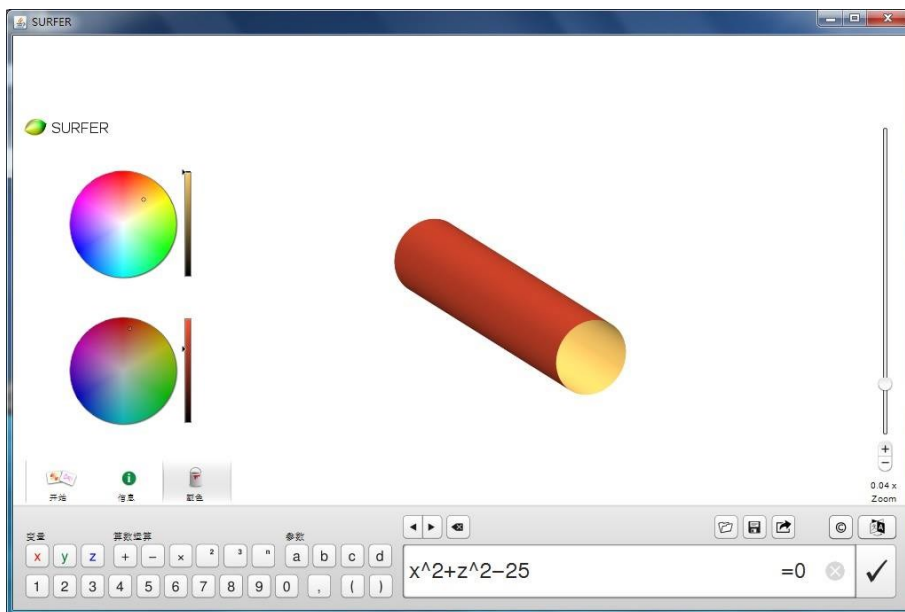
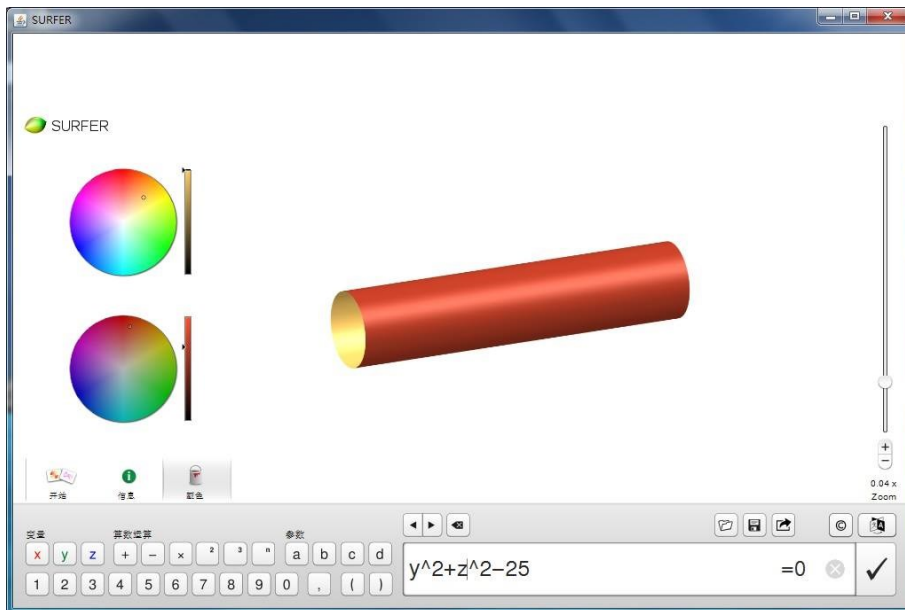
讓學生討論方程的立體圖形意義 (通常有人猜到是圓柱形)，教師以 surfer 進行示範，並且請學生討論「解釋」為何是這樣的圖形²？



緊接著，讓學生在 surfer 分別輸入「 $x^2 + z^2 - 25 = 0$ 」、「 $y^2 + z^2 - 25 = 0$ 」，依據圖形讓學生邏輯推理，勾勒出立體三維坐標的 x, y, z 軸位置。

¹ 當時八年級課程並進行到配方法，因此給定圓方程皆為配方後之型態。

² 可將「從三維到二維」視作投影概念。



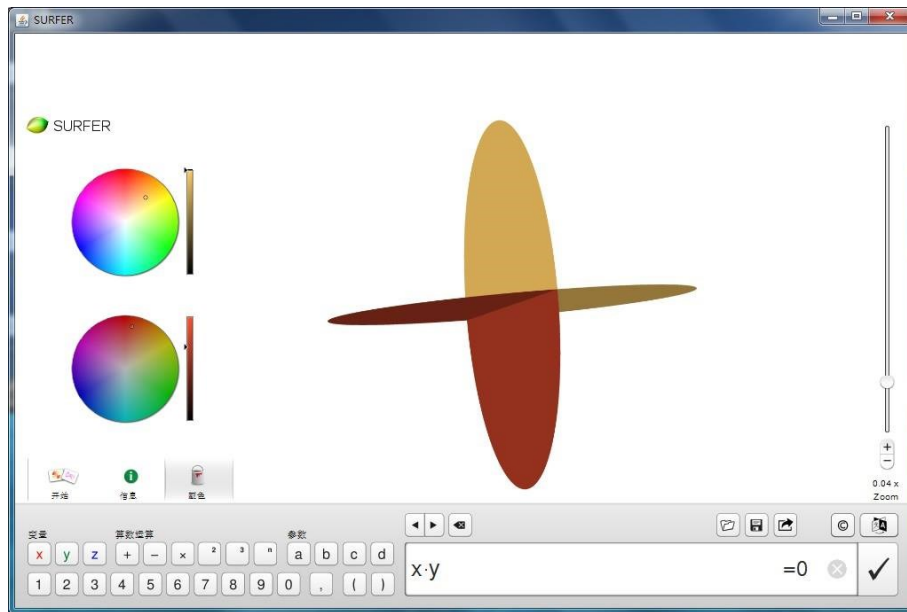
2.4 相乘為零的意義

2.4.1 複習舊經驗「因式分解」

$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$ 的「聯集」概念

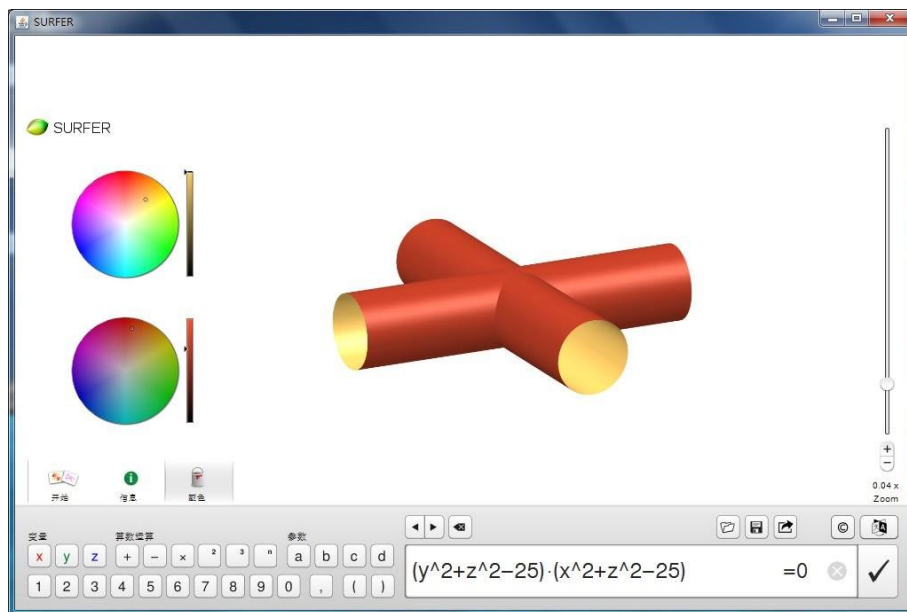
2.4.2 類化

利用 surfer 內建圖形 $xy = 0$ ($x = 0$ 或 $y = 0$) 討論立體圖形(平面)的意義(數形結合)。可再詢問學生二維直角坐標中 $xy = 0$ 的幾何意義 (x 軸或 y 軸)。



2.4.3 繪製牟合方蓋圖形

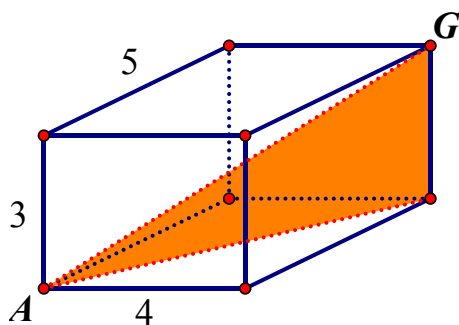
請依據前面所學習的知識，教師給定「牟合方蓋」圖形，請學生以 surfer 實作畫圖（例如：輸入 $(y^2 + z^2 - 25) \times (x^2 + z^2 - 25) = 0$ ）。



2.5 統整：從圓到球的雪人

2.5.1 舊經驗：長方體「蜜蜂飛」問題

問題 6：有一中空長方體紙盒，長 5 公尺、寬 4 公尺、高 3 公尺，若有一隻蜜蜂要從 A 點飛到 G 點，則它的最短距離（路徑）是多少？



2.5.2 新知識：空間中的兩點距離公式

利用 5.1 的舊經驗，再以問題 1 至問題 3 的提問模式，建構空間中的 $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ 兩點距離公式。

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

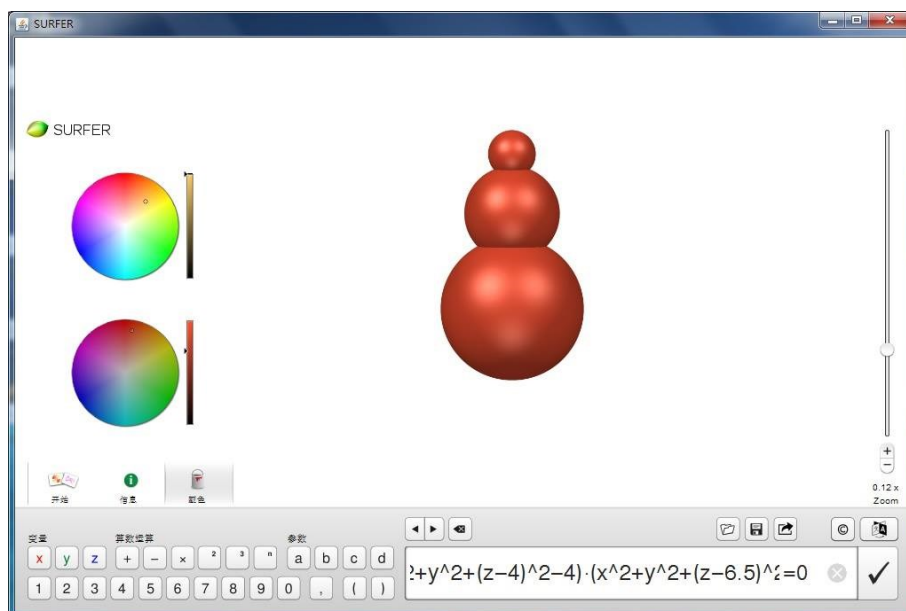
2.5.3 新知識：球方程、球心與半徑

以問題 4 的提問模式，類推空間中球方程。再給出多個球的方程，請學生找出球心及半徑，且觀察這些球的位置關係。

2.5.4. 雪人實作

以 Surfer 實作繪製「snowman」中的相容大球、中球、小球。

最後，請學生回家繼續探索，可將雪人畫上眼睛、穿上衣服等裝飾³。



³ 可瀏覽展示 Surfer 內建提供的元素工具，讓學生回家進行創作。

3.結語

感謝主講者 Bianca Violet 帶來互動性很強的 Surfer 程式。對於一般大眾的科普性、藝術性極佳；對於具有數理高潛能學生而言，也是一個探索幾何與代數的有利工具！

前述課程設計，僅為筆者參與 Surfer 程式研習後的心得及粗淺教學。事實上，中學數學內容可看作是素材 - 訓練思維的素材，學習的核心應在於思維能力培養，且透過數學去認識世界 (現象)(未來不一定以數學為職志)。

對筆者而言，如何使學生容易理解接受數學概念？如何透過舊經驗以類化學習新知識，並且能夠激起動機而回家繼續自學？這是筆者長期以來一直努力的目標。

4.參考資料

Imaginary 官方 Snowman 講義

https://imaginary.org/sites/default/files/snowman_bridges2015_0.pdf