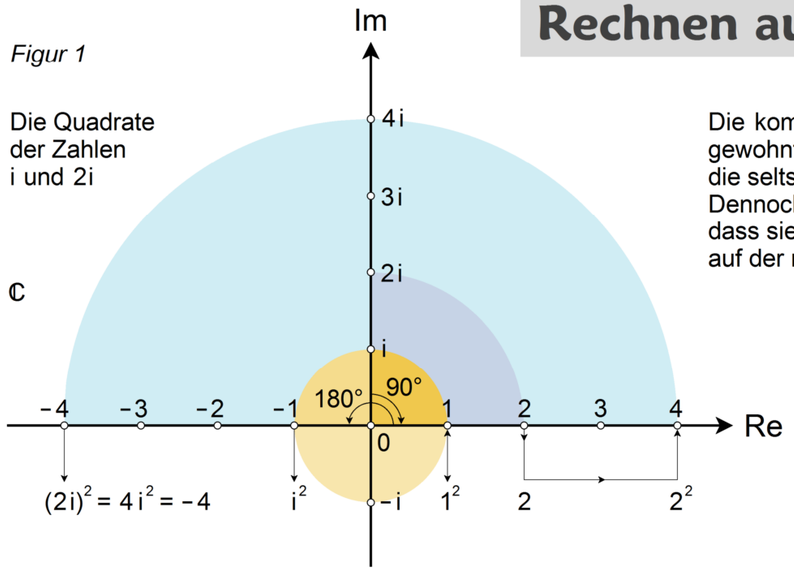
Rechnen auf der komplexen Gauß'schen Zahlenebene ℂ

Figur 1



Die Quadrate der Zahlen i und 2i

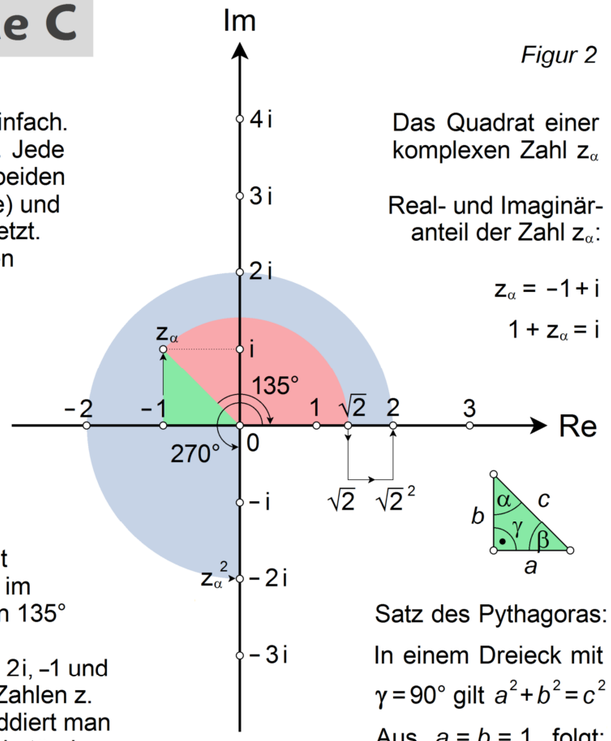
Die komplexen Zahlen widersprechen unserer gewohnten Vorstellung von Zahlen, besonders die seltsame Zahl i, deren Quadrat −1 ergibt. Dennoch sind ihre Rechenregeln so universell, dass sie auch für die "normalen" reellen Zahlen auf der reellen Achse (Re) Gültigkeit besitzen.

Die Zahlen, die auf der vertikalen Achse (Im) aufgetragen und durch die Einheit i gekennzeichnet sind, nennt man reine imaginäre Zahlen. Während −1 mal −1 das gleiche ergibt wie 1 mal 1, ist für i mal i das Ergebnis −1. Um die Zahl i zu verstehen, betrachtet man sie am besten einfach als einen Punkt auf der Gauß'schen Ebene ℂ.

Figur 1 zeigt, wie eine positive reine imaginäre Zahl bei der Multiplikation mit sich selbst einen neuen Punkt als Ergebnis zugewiesen bekommt. Die Zahl i wird auf einem Ursprungskreis mit Radius 1 um 90° im Uhrzeigersinn auf die positive reelle Achse weiterbewegt. Dort wird die entsprechende reelle Zahl, die 1, quadriert und wegen $1^2 = 1$ auf dem gleichen Kreis gegen den Uhrzeigersinn um den doppelten Winkel (180°) zurückbewegt, so dass das Ergebnis −1 ist. Bei 2i mal 2i findet die Rückbewegung wegen $2^2 = 4$ auf einem Kreis mit Radius 4 statt und führt zum Ergebnis −4. Bei −1 mal −1 führt eine Bewegung um 180° zur positiven 1. Da für die Rückbewegung der doppelte Winkel (360°) genommen wird, ist das Ergebnis 1.

Die Addition komplexer Zahlen ist sehr einfach. Sie gleicht der normalen Vektoraddition. Jede komplexe Zahl z, die nicht auf einer der beiden Achsen liegt, ist aus einem Realanteil (Re) und einem Imaginäranteil (Im) zusammengesetzt. Die komplexe Zahl z_α in Figur 2 besitzt den Realanteil −1 und den Imaginäranteil i.

Zur Multiplikation von z_α mit sich selbst muss man zunächst den Abstand von z_α zum Ursprung ermitteln. Er ist $\sqrt{2}$. Dann muss man z_α auf einem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um einen Winkel von 135° im Uhrzeigersinn bewegen, dass man auf die positive, reelle Achse gelangt. Dort multipliziert man $\sqrt{2}$ mit sich selbst und erhält 2. Anschließend bewegt man z_a auf einem Kreis mit Radius 2 im Gegenuhrzeigersinn um das Doppelte von 135° (270°) und kommt bei −2i an.
Die Quadrat-Regel, die am Beispiel von i, 2i, −1 und z_α gezeigt wurde, gilt für alle komplexen Zahlen z. Im allgemeineren Fall der Multiplikation addiert man die Winkel und multipliziert die Nullpunktabstände.



Figur 2

Das Quadrat einer komplexen Zahl z_α

Real- und Imaginäranteil der Zahl z_α:

$z_\alpha = -1 + i$

$1 + z_\alpha = i$

Satz des Pythagoras:

In einem Dreieck mit $\gamma = 90°$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$

Aus $a = b = 1$ folgt:

$c^2 = 2$ bzw. $c = \sqrt{2}$

Die Konstruktion der Mandelbrotmenge M

Rekursive Gleichung

$z_{n+1} = z_n^2 + c$

$z_0 = 0$ (Startwert)

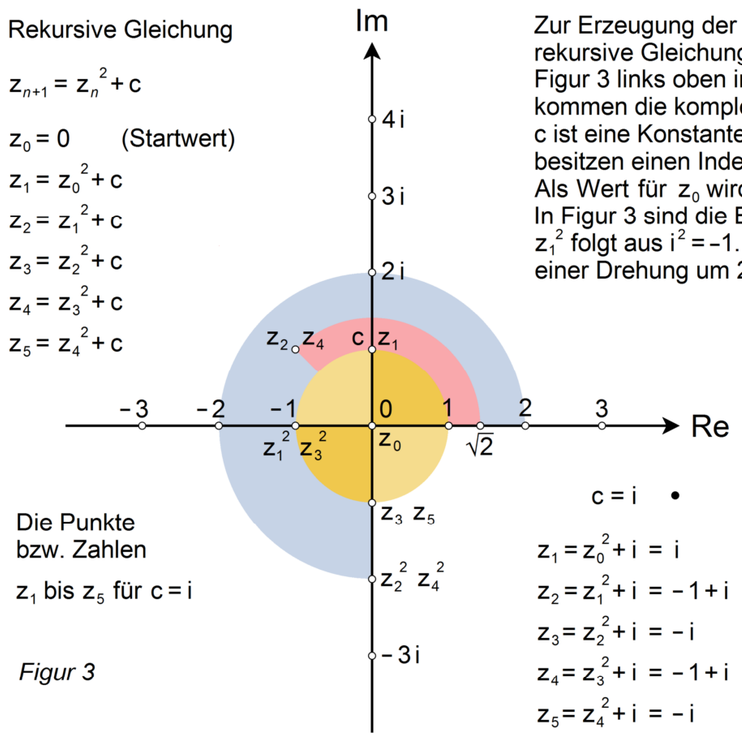
$z_1 = z_0^2 + c$

$z_2 = z_1^2 + c$

$z_3 = z_2^2 + c$

$z_4 = z_3^2 + c$

$z_5 = z_4^2 + c$



Die Punkte bzw. Zahlen z_1 bis z_5 für $c = i$

Figur 3

Zur Erzeugung der Mandelbrotmenge kommt eine quadratische rekursive Gleichung zur Anwendung. In dieser Gleichung, die in Figur 3 links oben in einer allgemeinen Form aufgeschrieben ist, kommen die komplexen Zahlen z und c vor.
c ist eine Konstante, die frei gewählt werden kann. Die Zahlen z besitzen einen Index *n*, der die natürlichen Zahlen durchläuft.
Als Wert für z_0 wird immer die 0 eingesetzt, so dass $z_1 = c$ folgt.
In Figur 3 sind die Berechnungen der z-Werte für $c = i$ illustriert. z_1^2 folgt aus $i^2 = -1$. z_2^2 entspricht z_α^2 in Figur 2. $z_3^2 = -1$ folgt aus einer Drehung um 270° im und 540° gegen den Uhrzeigersinn.

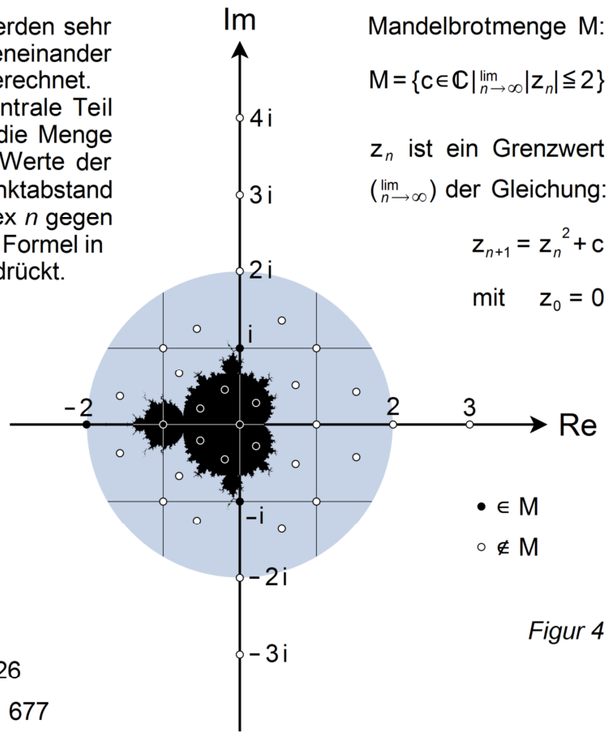
Unten wurde die Folge der z-Werte für einige reelle c-Werte berechnet.
Für $c = -1$ alterniert sie wie bei $c = i$.
Für $c = 0$ und $c = -2$ ist sie konstant.
Für $c = 1$ wächst sie exponentiell an.

$c = i$ •	$c = 0$ •	$c = -1$ •
$z_1 = z_0^2 + i = i$	$z_1 = 0 + 0 = 0$	$z_1 = 0 + (-1) = -1$
$z_2 = z_1^2 + i = -1 + i$	$z_2 = 0 + 0 = 0$	$z_2 = 1 + (-1) = 0$
$z_3 = z_2^2 + i = -i$	$z_3 = 0 + 0 = 0$	$z_3 = 0 + (-1) = -1$
$z_4 = z_3^2 + i = -1 + i$	$z_4 = 0 + 0 = 0$	$z_4 = 1 + (-1) = 0$
$z_5 = z_4^2 + i = -i$	$z_5 = 0 + 0 = 0$	$z_5 = 0 + (-1) = -1$

Zur Erzeugung der Mandelbrotmenge werden sehr lange Folgen von z-Werten für dicht nebeneinander liegende c-Werte von einem Computer berechnet.
Die Mandelbrotmenge, der schwarze zentrale Teil der komplexen Ebene ℂ in Figur 4, ist die Menge aller komplexen Zahlen c, für die die z-Werte der zugehörigen rekursiven Folge den Nullpunktabstand 2 nicht überschreiten, auch wenn der Index *n* gegen unendlich geht. Genau das wird durch die Formel in Figur 4 rechts oben mathematisch ausgedrückt.

Die schwarz markierten Punkte bzw. Zahlen $c = i$, $c = 0$, $c = -1$ und $c = -2$ gehören also zur Mandelbrotmenge, die weiß markierten Punkte, wie z. B. $c = 1$ oder $c = 1 + i$ hingegen nicht.

$c = -2$ •	$c = 1$ ○
$z_1 = 0 + (-2) = -2$	$z_1 = 0 + 1 = 1$
$z_2 = 4 + (-2) = 2$	$z_2 = 1 + 1 = 2$
$z_3 = 4 + (-2) = 2$	$z_3 = 4 + 1 = 5$
$z_4 = 4 + (-2) = 2$	$z_4 = 25 + 1 = 26$
$z_5 = 4 + (-2) = 2$	$z_5 = 676 + 1 = 677$



Mandelbrotmenge M:

$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} |z_n| \leqq 2\}$

z_n ist ein Grenzwert ($\lim_{n\to\infty}$) der Gleichung:

$z_{n+1} = z_n^2 + c$

mit $z_0 = 0$

• ∈ M

○ ∉ M

Figur 4

Autor: Uli Gaenshirt