Katzengold: Pyrit, Platon und ein Polynom

Stephan Klaus und Bianca Violet
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach und IMAGINARY - open mathematics
Schwarzwaldstrasse 9-11, Oberwolfach, Deutschland
klaus@mfo.de, bianca.violet@imaginary.org

Zusammenfassung

Was haben das Mineral Pyrit, der fünfte platonische Körper (genannt Dodekaeder) und ein Polynom vom Grad 16 gemeinsam? Dieser Artikel untersucht diesen Zusammenhang mit Hilfe der kostenlosen Software SURFER der Plattform IMAGINARY - open mathematics. Daraus entstehen faszinierende Bilder, die zeigen, wie ein Würfel sich nacheinander in einen Dodekaeder, einen Rhombendodekaeder und einen Oktaeder verwandelt, alles dank einer einzigen Formel. Es wird ein Überblick über die Ideen und die Mathematik hinter diesen Visualisierungen gegeben. In der Tat kann jeder mit Hilfe der SURFER-Software diese Formen in Echtzeit erkunden und selbst verändern. Ferner haben die Autoren einen Kurzfilm erstellt, der die einfache geometrische Schönheit dieser Zusammenhänge vor Augen führt.

Goldener Glanz und griechische Geometer

Seinen Populärnamen *Katzengold* hat das Mineral Pyrit wegen seiner oberflächlichen und trügerischen Ähnlichkeit zu Gold erhalten. Pyrit ist ein Eisensulfid mit der chemischen Formel FeS_2 und das häufigste der Sulfidminerale [1]. Es sind 60 verschiedene Kristallstrukturen des Pyrits bekannt. Das würfelförmige Pyrit-Kristall (Abbildung 1.a) wird am häufigsten gebildet. Pyrit kann aber auch in Gestalt oktaedrischer (Abbildung 1.b) oder sogar dodekaedrischer Kristalle (Abbildung 1.c) vorkommen – das ist eine seltene Eigenschaft für Mineralien. Man beachte, dass die dodekaedrische Struktur zwei unterschiedliche Kantenlängen aufweist und daher irregulär ist. Kristalle können sich nicht aus absolut regulären Dodekaedern zusammensetzen [2]. Unter den anderen bekannten Kristallstrukturen finden sich Kombinationen der drei erwähnten. Selten und üblicherweise nur in Verbindung mit anderen Strukturen kommen auch auch Trapezoeder oder Rhombendodekaeder als Formen des Pyrits vor.

(a) würfelförmig (b) oktaedrisch (c) dodekaedrisch

Abbildung 1 : *Pyritkristalle*

Wir machen einen kurzen Exkurs zu den fünf platonischen Körpern; dem Tetraeder, dem Hexaeder (oder Würfel), dem Oktaeder und dem Ikosaeder (Abbildung 2).

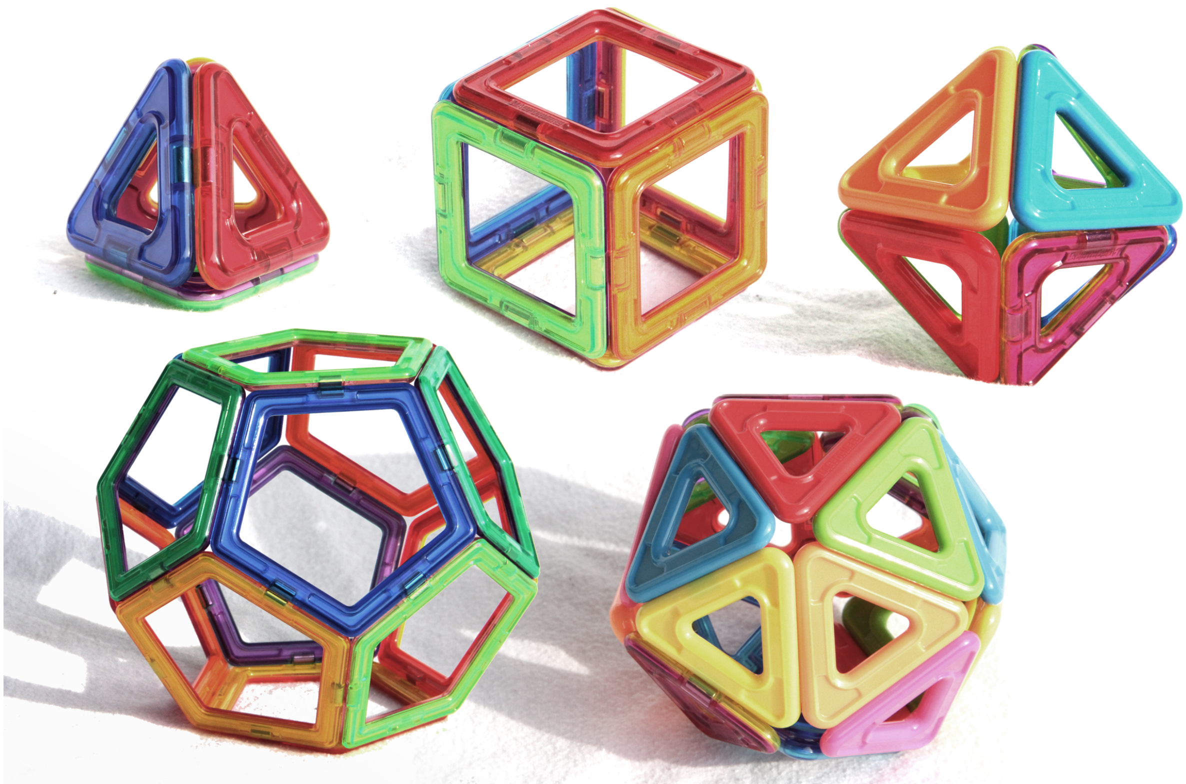


Abbildung 2 : *Die fünf platonischen Körper*

Ein platonischer Körper ist ein konvexer Polyeder mit regulären Polygonen als zueinander kongruenten Seitenflächen, wobei sich an jeder Ecke gleich viele Seitenflächen treffen. Es kann mathematisch gezeigt werden, dass es genau fünf platonische Körper gibt, und ihre griechischen Namen beziehen sich auf ihre Seitenanzahl (tetra $= 4$, hexa $= 6$, okta $= 8$, dodeka $= 12$, ikosa $= 20$). Griechische Geometer und Philosophen, insbesondere Platon, haben bereits vor mehr als 2000 Jahren ihre mathematische Schönheit und Symmetrie untersucht. Darüber hinaus sind vier der platonischen Körper den vier klassischen Elementen der Alchemie zugeordnet: Feuer = Tetraeder, Luft = Oktaeder, Wasser = Ikosaeder und Erde = Würfel. Aristoteles hat den Äther als fünftes Element ergänzt, aus dem himmlische, übernatürliche und durchscheinende Dinge bestehen, wie die Seele und die Himmelssphären, welche die Gestirne tragen. Das Symbol dieser *Quintessenz* ist der Dodekaeder [4], der einzige platonische Körper, der aus Fünfecken gebildet wird.

Algebraische Geometrie

Wenden wir uns nun der *algebraischen Geometrie* zu, genauer der reellen algebraischen Geometrie in 3 Dimensionen. Nehmen wir an, wir haben eine einzige polynomielle Gleichung $p(x, y, z) = 0$ in den drei Variablen x, y und z gegeben. Eine Lösung dieser Gleichung zu finden, heißt, drei Werte für die Variablen anzugeben, und diese Werte können als Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raum interpretiert werden [5]. Mathematische Überlegungen zeigen, dass im Allgemeinen die Menge *aller* Lösungen eine gekrümmte Fläche bildet, möglicherweise mit Singularitäten wie Selbstdurchdringungen oder Spitzen. So erzeugt eine algebraische Gleichung $p(x, y, z) = 0$ eine Fläche bzw. ein geometrisches Objekt; d. h. eine Formel erzeugt eine Form [6]. Sehr oft ist es möglich, verblüffende und kunstvolle Flächen durch relativ einfache Gleichungen hervorzubringen [7], und es gibt grundlegende Verbindungen zwischen Formel und Form, die von der modernen mathematischen Forschung erst zum Teil verstanden werden.

Hier sollte man hervorheben, dass man mit Hilfe der kostenlosen Software SURFER [8] der Plattform IMAGINARY – open mathematics [9] die algebraische Fläche zu einem gegebenen Polynom in Echtzeit visualisieren kann. Die Software lässt sich schnell installieren und kann auch von Nichtmathematikern sehr leicht bedient werden [5]; sie wurde während des deutschen Jahrs der Mathematik 2008 besonders für die breite Öffentlichkeit entwickelt.

Fangen wir mit einem Würfel an. Man kann ihn durch die einfache Gleichung $x^{16} + y^{16} + z^{16} = 1$ näherungsweise beschreiben. Man bemerke, dass dies ein dreidimensionales Analogon der Laméschen Kurve [10] ist, die auch in den Arbeiten des berühmten dänischen Wissenschaftlers, Künstlers und Designers Piet Hein eine Rolle spielt. Abbildung 3 zeigt ein Bild, das die Autoren mit Hilfe der SURFER-Software erstellt haben:

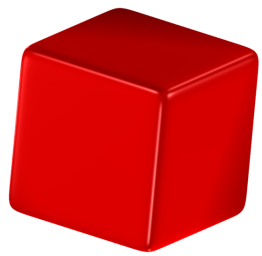
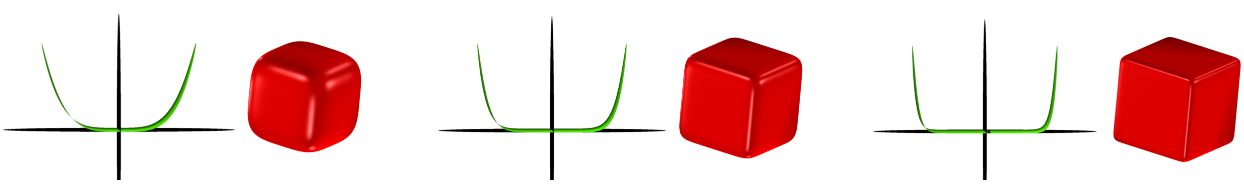


Abbildung 3 : *Näherung eines Würfels*

Tatsächlich ist jede gerade Zahl $2n$ (ab $n = 2$) anstelle von 16 ebenfalls eine zulässige Wahl für den Exponenten. Je größer der Exponent, desto mehr ähnelt die algebraische Fläche dem Würfel. Das kann man sehen, indem man den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{2n}$ betrachtet, der für große Werte von n immer eckiger aussieht (Abbildung 4). Man beachte, dass der Exponent 2 (d. h. $n = 1$) wegen des dreidimensionalen Satzes von Pythagoras die Oberfläche einer runden Kugel ergäbe.



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$

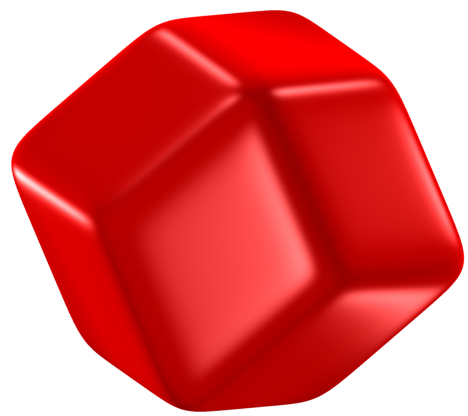
Abbildung 4 : *Der Graph von* $x \mapsto x^{2n}$ *und die algebraische Fläche* $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$

Als Nächstes möchten wir eine algebraische Fläche konstruieren, die einen Dodekaeder approximiert. Dafür beginnen wir mit drei *goldenen Rechtecken*. Deren 12 Ecken sind gegeben durch die Koordinaten $(\pm1, \pm\phi, 0)$, $(0, \pm1, \pm\phi)$ und $(\pm\phi, 0, \pm1)$, wobei $\phi := \Phi - 1 = \Phi^{-1}$ und Φ der Goldene Schnitt ist [11], also $\phi \approx 0.62$. Es ist bekannt und kann durch einfaches Nachrechnen überprüft werden, dass diese 12 Ecken einen Ikosaeder aufspannen [12]. Der Dodekaeder und der Ikosaeder bilden ein *duales Paar*; Seiten und Ecken tauschen ihre Rollen [3]. Wir *dualisieren* also die beschriebene Konstruktion und verwenden die Koordinaten der Ecken als Koeffizienten in der einfachen Gleichung $ax + by + cz = d$, wobei a, b, c die Werte 0, ±1 oder $\pm\phi$ annehmen können. Eine solche Gleichung beschreibt eine Ebene, die senkrecht zum jeweiligen Eckenvektor (a, b, c) ist, und ein Paar gegenüberliegender Ecken ergibt zwei parallele Ebenen. Wenn (a, b, c) ein Vektor der Länge 1 ist, misst d den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung. Wir erhalten schließlich 6 Ebenen, die parallel zu den 12 Seiten eines Dodekaeders verlaufen (jede Seite ist parallel zu der ihr gegenüberliegenden). Indem wir die Summe aus 6 solchen Gleichungen bilden und jede einzelne mit dem Exponenten $2n$ versehen (wobei wir $n = 8$ wählen), erhalten wir:

$$(ax+by+z)^{16}+(-ax+by+z)^{16}+(x+ay+bz)^{16}+(x-ay+bz)^{16}+(bx+y+az)^{16}+(bx+y-az)^{16}=1$$

Für $a=0$ und $b=0$ ist das wieder die Gleichung des Würfels. Und für andere Werte der Koeffizienten a und b erhalten wir weitere glatte Flächen zum Beispiel in der Form eines Oktaeders (Abbildung 5.a), eines Rhombendodekaeders (Abbildung 5.b) und eines Dodekaeders (Abbildung 6).

(a) $a=1, b=1$



(b) $a=1, b=0$

Abbildung 5 : *Oktaeder und Rhombendodekaeder*

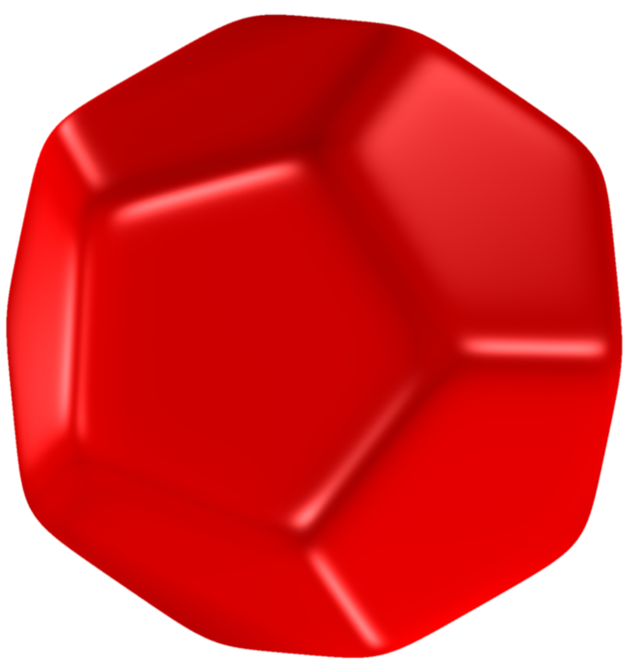


Abbildung 6 : $a=0.62$ *und* $b=0$ *ergeben den Dodekaeder.*

Wir können sogar in Echtzeit zwischen verschiedenen Formen interpolieren, indem wir in der SURFER-Software veränderliche Koeffizienten verwenden. Die Autoren haben auch einen Kurzfilm über diese Transformationen [13] erstellt, der beim Kurzfilmfestival der Bridges-Konferenz 2015 gezeigt werden wird.

Danksagung. Die Autoren möchten Gert-Martin Greuel, dem Gründer des IMAGINARY-Projekts, für sein visionäres Denken, sein Engagement und seine ansteckende Begeisterung bei der Sensibilisierung der Öffentlichkeit für die Schönheit der Mathematik danken.

Aus dem Englischen übersetzt von Sophia Jahns.

Verzeichnis der Fotografien

1 Würfelförmige, oktaedrische und dodekaedrische Pyrit-Kristalle,
aus der Sammlung Brieskorn, Museum für Mineralien und Mathematik.
Fotografiert von B. Violet.
Mit freundlicher Genehmigung des Vereins der Freunde von Mineralien und Bergbau Oberwolfach e.V.

2 Platonische Körper als Hohlformen aus Magnetformen für Kinder.
Fotografiert von B. Violet.
Mit freundlicher Genehmigung von Fiona Violet.

Literatur

[1] „Pyrite“, `http://en.wikipedia.org/wiki/Pyrite` (Stand: 14.03.15)

[2] Greuel, G.-M., „Crystals and Mathematics“, In: *A Focus on Crystallography*, FIZ Karlsruhe 2014.

[3] „Platonic solid“, `http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid` (Stand: 14.03.15)

[4] „Platonischer Körper“, `http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_K%C3%B6rper` (Stand: 14.03.15)

[5] Greuel, G.-M., „Visualization of algebraic surfaces“, `http://imaginary.org/sites/default/files/surfer2012-manual-a1-indesign_2014_0.pdf` (Stand: 14.03.15)

[6] Hauser, H., „Die Auflösung von Singularitäten“, `http://imaginary.org/sites/default/files/imaginary-herwig-hauser.pdf` (Stand: 14.03.15)

[7] Hartkopf, A. und Matt, A. D., „The art of an algebraic surface“, `http://imaginary.org/sites/default/files/vismath-book-art-hartkopf-matt.pdf` (Stand: 14.03.15)

[8] „SURFER“, *software*, `http://imaginary.org/program/surfer` (Stand: 14.03.15)

[9] „IMAGINARY - open mathematics“, `http://imaginary.org/` (Stand: 14.03.15)

[10] Gridgeman, N. T., „Lamé Ovals“, In: Math. Gaz. 54, 31-37, 1979.

[11] „The golden ratio“, `http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio` (Stand: 14.03.15)

[12] „The regular icosahedron“, `http://en.wikipedia.org/wiki/Regular_icosahedron` (Stand: 14.03.15)

[13] Violet, B. und Klaus, S., „Katzengold“, *Kurzfilm*, `http://imaginary.org/film/katzengold` (Stand: 15.05.15)