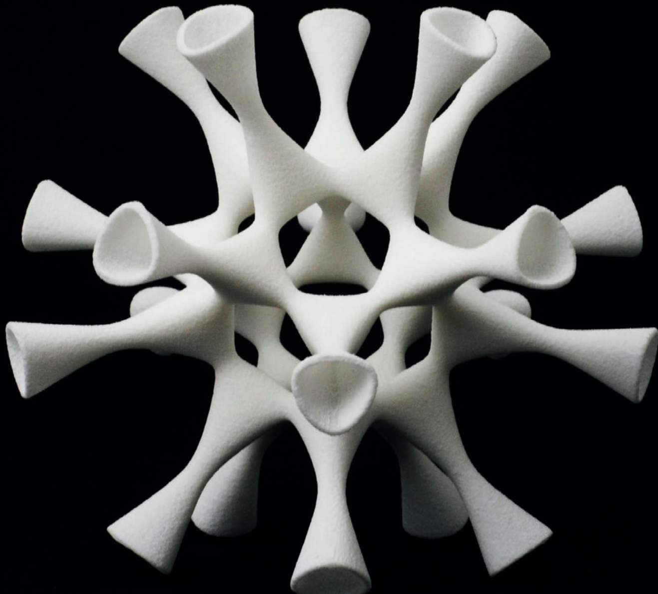


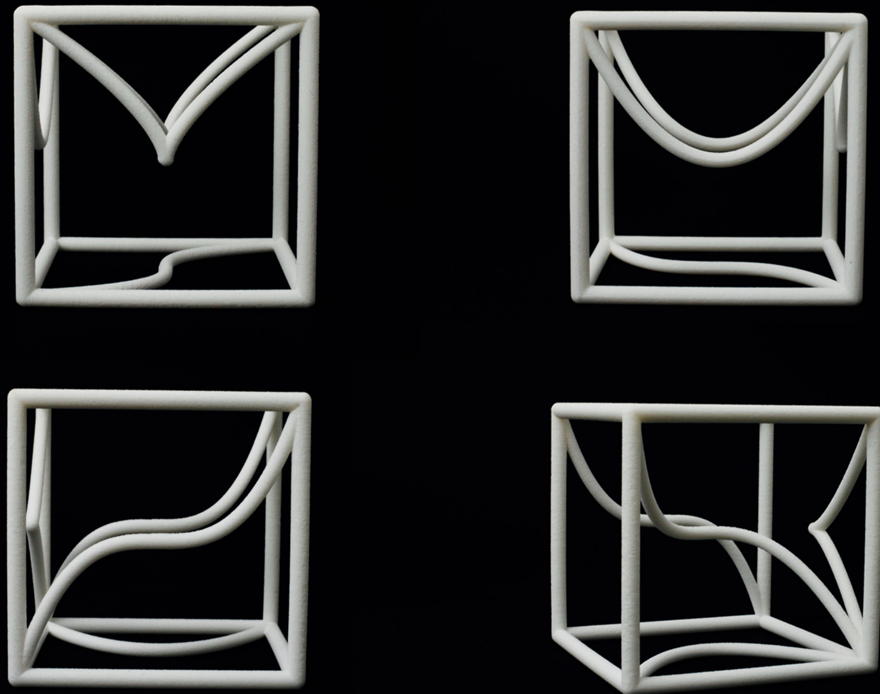
Die Barth-Sextik – ein ewiger Weltrekord

3D-Skulptur von Oliver Labs

Auch in der Mathematik gibt es Weltrekorde und die Barth-Sextik, entdeckt um 1996 vom Erlanger Professor Wolf Barth, stellt einen solchen dar. Das Besondere daran: Andere Mathematiker konnten beweisen, dass Barth dieser Weltrekord nie mehr abgenommen werden kann!

Manche Flächen im Raum lassen sich nämlich durch eine einzige Gleichung in drei Unbekannten x,y,z beschreiben; und einige davon sogar durch relativ einfache, nämlich solche, in denen nur Zahlen und die Rechenzeichen +,-,· vorkommen, zum Beispiel: $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot z \cdot z$ oder kurz: $xyz = 2z^2$. Eine Fläche, deren Punkte (x,y,z) eine solche Gleichung erfüllen, heißt algebraische Fläche. Die größte Anzahl der Unbekannten (Variablen), die hierbei in einem Produkt auftauchen, heißt Grad der Fläche, also im Beispiel 3, weil $x \cdot y \cdot z$ mit 3 Variablen und $2 \cdot z \cdot z$ mit 2 Variablen die einzigen Produkte sind.

In den meisten Punkten sehen algebraische Flächen glatt aus, wie zum Beispiel eine Kugeloberfläche. An manchen Stellen können aber auch Singularitäten auftreten, entweder isolierte Singularitäten, auch Spitzen genannt, oder Kurven von Singularitäten wie bei Selbstdurchdringungen. Erstaunlicherweise können es nur ziemlich wenige Spitzen sein, speziell wenn der Grad der Fläche klein ist. Für Grad 2 kann es beispielsweise nur eine einzige Spitze geben. Für Grad 6 (daher Sextik) dachten Mathematikerinnen und Mathematiker lange, dass 64 die höchstmögliche Anzahl sei, bis Barth eine Gleichung erdachte, die eine Fläche mit 65 isolierten Singularitäten beschreibt. Bereits kurz danach waren die Mathematiker David Jaffe und Daniel Ruberman in der Lage, auf recht abstrakte Weise nachzuweisen, dass es auf einer Fläche vom Grad 6 auch nicht mehr Spitzen geben kann. Dies war also tatsächlich der Beweis dafür, dass die Barth-Sextik einen ewigen Weltrekord darstellt.



Schatten faszinieren uns schon seit unserer Kindheit. Sie werden länger und kürzer, je nach Lichteinfall, und sie können ungeahnte Formen hervorrufen. Mit unseren Händen können wir sogar ganze Schattenspiele auf eine Wand werfen.

Welche Formen können wir erhalten, wenn wir einen Draht formen und dessen Schatten beobachten, ohne den Draht zu verknoten und ohne Knicke in den Draht zu biegen; wenn wir also, mathematisch gesprochen, eine glatte Raumkurve auf eine Ebene projizieren? Wenn wir den Draht richtig halten, schaffen wir es recht leicht, den Schatten so aussehen zu lassen, als wäre der Draht eigentlich eine Schlaufe. Aber es geht sogar noch spezieller! Unser Modell zeigt eine glatte Raumkurve und deren Projektionen in drei Ebenen: Eine ist eine Parabel, eine weitere der Graph einer Funktion vom Grad 3 und die dritte ist eine Kurve mit einer Spitze. Schaffst du es, einen glatten Draht so zu halten, dass sich eine solche Spitze als Schatten zeigt?

Die Raumkurve, die sich innerhalb des Würfels des Modells windet, kann man am einfachsten mathematisch beschreiben, indem man für alle Punkte der Kurve ihre Koordinaten im Raum angibt. Diese erhält man, indem man in die folgende Formel Werte von t einsetzt: $(x,y,z) = (t, t^2, t^3)$. Nehmen wir beispielsweise $t = 2$, so erhalten wir den Punkt $(2,2^2,2^3) = (2,4,8)$; dieser Punkt liegt also auf der Raumkurve. Eine solche Beschreibung einer Kurve über die Koordinaten der Punkte, die von einem Parameter – hier t – abhängen, nennt man Parameter-Darstellung.

Wenn wir nun die Sonne senkrecht auf die Ebene $z = 0$ scheinen lassen, sehen wir dort den Schatten der Kurve als Punkte $(x,y,z) = (t,t^2,0)$. Und dies ist tatsächlich eine Parabel, denn es gilt $y = x^2$, weil $x = t$ und $y = t^2$ ist. Genauso ergeben sich die Gleichungen der anderen Schatten auf den Koordinaten-Ebenen. Für $y = 0$ erhalten wir $(x,y,z) = (t,0,t^3)$, also $x = z^3$ und für $x = 0$ die Gleichung: $(x,y,z) = (0,t^2,t^3)$, d.h. $z^2 = y^3$ bzw. $z = \pm\sqrt{y^3}$.

Die Dini-Fläche – eine unendliche Blume

3D-Skulptur von Oliver Labs

Jede Form, die in unserer Welt existiert, kann man prinzipiell näherungsweise durch mathematische Formeln beschreiben – auch wenn dies in der Praxis oft schwierig bis unmöglich ist. Umgekehrt ist es aber leicht, abstrakte mathematische Gebilde zu konstruieren, die in der Natur nicht existieren können, z.B. weil sie unendlich groß oder unendlich klein sind oder sich unendlich oft winden. Einige Formen der Natur zeigen faszinierende Symmetrien oder Spiralen, doch häufig nur ungefähr. Mathematisch beschriebene abstrakte Objekte können dies in Perfektion aufweisen.

Die Dini-Fläche ist ein besonderes Beispiel dieser Art: Sie windet sich in unendlich vielen Spiralen um eine unendlich lange Gerade, wobei ihre so genannte Gaußsche Krümmung K in jedem Punkt der Fläche gleich ist. Alle Punkte der Dini-Fläche erhält man, indem man in die folgende Formel Werte für s und für t einsetzt: $(x, y, z) = (\cos(s)\sin(t), \sin(s)\sin(t), \cos(t)+\ln(\tan(t/2))+s)$. Eine solche Beschreibung einer Fläche nennt man Parameter-Darstellung. Die Windungen der Fläche kann man an dieser Parameter-Darstellung erkennen, wenn man z.B. einen der beiden Parameter s und t fest hält. Beispielsweise erhält man für einen festen Wert von t im Wesentlichen die Kurve $(\cos(s), \sin(s), s)$, was eine unendliche Spirale um die z-Achse definiert, die von oben gesehen genau ein Kreis ist.

Die Blumenform ergibt sich auf natürliche Weise, indem man sowohl für den Parameter s als auch für t nur einen kleinen endlichen Ausschnitt zeigt, etwa $s = 0,\dots,\pi$ und $t = 0.02,\dots,1$.

Tülle – Parabeln in 3D

Parabeln gibt es nicht nur in der Schulstunde – ihre 3D-Verwandten sind für unser modernes Leben äußerst wichtig, und können sogar ästhetisch aussehen, wie die Tülle zeigt.

Manche Flächen im Raum lassen sich nämlich durch eine einzige Gleichung in drei Unbekannten x,y,z beschreiben; und einige davon sogar durch relativ einfache, nämlich solche, in denen nur Zahlen und die Rechenzeichen $+,-,\cdot$ vorkommen, zum Beispiel: $x\cdot y\cdot z = 2\cdot z\cdot z$ oder kurz: $xyz = 2z^2$. Eine Fläche, deren Punkte (x,y,z) eine solche Gleichung erfüllen, heißt algebraische Fläche. Die größte Anzahl der Unbekannten (Variablen), die hierbei in einem Produkt auftauchen, heißt Grad der Fläche, also im Beispiel 3, weil $x\cdot y\cdot z$ mit 3 Variablen und $2\cdot z\cdot z$ mit 2 Variablen die einzigen Produkte sind.

Die Punkte der Fläche, die der Wiener Professor Herwig Hauser Tülle benannt hat, erfüllen die Gleichung $y\cdot z\cdot(x^2+y-z) = 0$, d.h. ausmultipliziert: $y\cdot z\cdot x\cdot x+y\cdot y\cdot z-y\cdot z\cdot z = 0$. Sie hat also Grad 4. An der ursprünglichen Gleichung sieht man, dass zwei ganze Ebenen Teil der Fläche sind, und zwar die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ (also alle Punkte (x,y,z) des Raumes, deren y-Koordinate bzw. z-Koordinate 0 ist). Setzen wir nämlich z.B. die Koordinaten $(7,0,3)$ in die Gleichung ein, ergibt sich $0\cdot 3\cdot(7^2+0-3) = 0$, ohne dass wir lange rechnen müssten. Genauso kann man nachprüfen, dass alle Punkte der Parabel $y = -x^2+1$ mit $z = 1$ die Gleichung erfüllen: $(-x^2+1)\cdot 1\cdot(x^2-x^2+1-1) = 0$ für jeden Wert von x. Ähnlich geht dies für jeden festen Wert von z, beispielsweise $z = k$ und $y = -x^2+k$. Auf der Tülle liegen also unendlich viele Parabeln!

Lässt man in der ursprünglichen Gleichung die beiden Faktoren y und z weg, ergibt sich die Gleichung $x^2+y-z = 0$. Genauso wie eben kann man nachprüfen, dass diese Oberfläche aus unendlich vielen nebeneinander liegenden Parabeln besteht. Solche sogenannten Parabelrinnen werden beispielsweise verwendet, um in der Wüste Strom mit Sonnenenergie zu gewinnen.